Chap. V : Tribus

La théorie moderne de l'intégration nécessite tout d'abord de définir des ensembles « mesurables ». On verra au chapitre suivant la notion de mesure elle-même, définie pour chacun de ces ensembles mesurables.

Pour pouvoir développer cette théorie, on doit pouvoir faire certaines opérations sur les ensembles mesurables. En particulier, la réunion de deux ensembles mesurables doit encore être mesurable, l'ensemble vide doit être mesurable, et le complémentaire (dans l'ensemble de référence) d'un ensemble mesurable doit l'être aussi.

(1) Définitions et exemples de base.

Définition 1 : Soit X un ensemble (non vide). Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties de X. On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre de parties de X si

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

ii) quel que soit $B \in \mathcal{A}$, $B^c = X \setminus B \in \mathcal{A}$,

iii) quels que soient B_0 et $B_1 \in \mathcal{A}$, $B_0 \cup B_1 \in \mathcal{A}$.

Exemples :

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ est une algèbre de parties de X.
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ ———————— de X.

Cependant les algèbres de parties ne sont pas suffisantes, et on va définir des « σ-algèbres », encore appelées tribus en français.

Notons avant cela que toute algèbre de parties de X doit contenir X, d'après i) et ii) (puisque $X = \emptyset^c$!), qu'elle est « stable par réunion finie » par application répétée de iii) : si $(B_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ avec $B_k \in \mathcal{A}$ une algèbre de parties alors $\bigcup_{k \in [\![0,n]\!]} B_k \in \mathcal{A}$ (par une récurrence immédiate).

De plus, par application de ii), on en déduit aussi que $\bigcap_{k\in[\![0,n]\!]} B_k \in \mathcal{A}$ (car $B_k^c \in \mathcal{A}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, donc $\bigcup_{k\in[\![0,n]\!]} B_k^c \in \mathcal{A}$ d'après ce qui précède, d'où $\left(\bigcup_{k\in[\![0,n]\!]} B_k^c\right)^c \in \mathcal{A}$ d'après ii) et

$$\left(\bigcup_{k\in[\![0,n]\!]} B_k^c\right)^c = \bigcap_{k\in[\![0,n]\!]} B_k).$$

Pour résumer, une algèbre de parties de X contient $\emptyset$ et X, est stable par

- passage au complémentaire,
- réunion finie,
- intersection finie.

La seule chose qui va changer dans les σ-algèbres est le mot dénombrable à la place de finie.

<u>Définition 2</u> : Soit X un ensemble (non vide). Soit $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$.
On dit que $\mathcal{M}$ est une σ-algèbre, ou tribu sur X si

i) $\emptyset \in \mathcal{M}$,

ii) quel que soit $A \in \mathcal{M}$, $A^c = X \setminus A \in \mathcal{M}$,

iii) pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $A_n \in \mathcal{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

<u>Remarques</u> : • iii) implique en particulier que si $(B_k)_{k\in[\![0,m]\!]}$ avec $B_k \in \mathcal{M}$, pour tout $k \in [\![0,m]\!]$ alors $\bigcup_{k\in[\![0,m]\!]} B_k \in \mathcal{M}$. Il suffit en effet de poser $A_k = B_k$ si $k \in [\![0,m]\!]$ et $A_n = B_m$ pour tout $n \geqslant m+1$.

• comme dans le cas des algèbres, on déduit de ii) et iii) qu'une tribu est stable par intersection dénombrable.

Les éléments d'une tribu sont appelés ensembles mesurables, et un ensemble X muni d'une tribu $\mathcal{M}$ est appelé espace mesurable.

Exemples :

- $(X, \mathcal{M} = \{\emptyset, X\})$ est un espace mesurable, et $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$ est appelée tribu grossière.
- $(X, \mathcal{M} = \mathcal{P}(X))$ est un espace mesurable, et $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ est appelée tribu discrète. C'est celle que vous avez utilisée (sans le savoir, probablement) quand vous avez étudié des probabilités discrètes : les événements que vous avez considérés étaient toujours mesurables (vous pouviez définir, si ce n'est calculer, leur probabilité).

Remarque : toute tribu contient au moins la tribu grossière et est incluse dans la tribu discrète. Autrement dit, la tribu grossière est la plus petite tribu et la tribu discrète la plus grosse.

Question assez naturelle : peut-on faire des opérations sur les tribus ?

② Tribus engendrées

Lemme : si $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ est une famille de tribus alors $\bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i$ est encore une tribu.

Démonstration : i) $\emptyset \in \mathcal{M}_i$ quel que soit $i \in I$ donc $\emptyset \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i$.

ii) soit $A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i$: ceci signifie que pour tout $i \in I$, $A \in \mathcal{M}_i$.
Donc, puisque $\mathcal{M}_i$ est une tribu, $A^c \in \mathcal{M}_i$, et donc $A^c \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i$.

iii) Supposons que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in I$, $A_n \in \mathcal{M}_i$.
Donc, puisque $\mathcal{M}_i$ est une tribu, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}_i$, et donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i$. ■

Proposition : Soit X un ensemble (non vide). Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Il existe une unique tribu $\sigma(\mathcal{B})$ contenant $\mathcal{B}$ qui soit minimale pour l'inclusion, c'est-à-dire telle que toute tribu contenant $\mathcal{B}$ contienne $\sigma(\mathcal{B})$.

Démonstration : soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des tribus qui contiennent $\mathcal{B}$.
Alors $\bigcap_{\mathcal{M} \in \mathcal{E}} \mathcal{M}$ est une tribu, d'après le lemme.

Puisque $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$, quelque soit $\mathcal{M} \in \mathcal{E}$, $\mathcal{B} \subset \bigcap_{\mathcal{M} \in \mathcal{E}} \mathcal{M}$, et quelle que soit $\mathcal{M} \in \mathcal{E}$, $\bigcap_{\mathcal{M} \in \mathcal{E}} \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$.

L'unicité de $\sigma(\mathcal{B}) = \bigcap_{\mathcal{M} \in \mathcal{E}} \mathcal{M}$ comme élément minimal de $\mathcal{E}$ s'obtient comme pour tout élément minimal : si $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont deux éléments minimaux de $\mathcal{E}$ pour l'inclusion, alors $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1$, donc $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$. ▨

Définition : Soit X un ensemble (non vide) et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$.
La plus petite tribu sur X contenant $\mathcal{B}$ est appelée tribu engendrée par $\mathcal{B}$.

③ Tribus boréliennes

Une tribu dite borélienne est l'exemple fondamental de tribu engendrée. Cette notion fait le lien entre théorie de la mesure et topologie.

Rappel du cours de topologie : Un espace topologique est un ensemble X muni d'une topologie $\mathcal{T}$, qui est un ensemble de parties de X appelées ouverts. Axiomes définissant une topologie :

a) $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$,

b) pour toute famille $(O_i)_{i \in I}$ avec $O_i \in \mathcal{T}$ quel que soit $i \in I$, on a $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

c) pour toute famille finie $(O_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ avec $O_k \in \mathcal{T}$ quel que soit $k \in [\![0,n]\!]$, on a $\bigcap_{k \in [\![0,n]\!]} O_k \in \mathcal{T}$.

Une topologie vérifie donc, d'après a) et b), les axiomes i) et iii) d'une tribu.
MAIS : pas ii).

En effet, les complémentaires des ouverts sont les fermés par définition, et ils ne sont en général pas ouverts, même s'ils le sont pour

- la topologie grossière $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$,
- la topologie discrète $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.

En particulier, les ouverts de $\mathbb{R}^d$ muni de sa structure d'espace vectoriel normé ne sont pas ses fermés.

Définition : Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On appelle tribu borélienne sur cet espace la tribu engendrée par $\mathcal{T}$.
Les éléments de cet tribu sont appelés boréliens.

En général on a $\mathcal{T} \subsetneq \sigma(\mathcal{T}) \subsetneq \mathcal{P}(X)$.

Proposition : La tribu borélienne d'un espace topologique contient

- tous les ouverts,
- tous les fermés,
- toutes les réunions dénombrables de fermés,
- toutes les intersections dénombrables d'ouverts.

Démonstration : Elle contient les ouverts par définition d'une tribu borélienne, et donc aussi les fermés d'après l'axiome ii) des tribus, et par suite aussi les réunions dénombrables de fermés d'après l'axiome iii), et finalement les intersections dénombrables d'ouverts, qui sont les complémentaires des réunions dénombrables de fermés, d'après l'axiome ii) à nouveau. ⊠

Définition : une réunion dénombrable de fermés est appelée F_σ, et une intersection dénombrable d'ouverts est appelée G_δ.

Exemple : $[a,b[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [a, b-\frac{1}{n}] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]a-\frac{1}{n}, b[$ est à la fois un F_σ et un G_δ.

V

<u>Notation</u> : la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ muni de sa structure d'espace vectoriel normé est notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

<u>Proposition</u> : la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par l'ensemble dénombrable $\mathcal{Q} = \{]q, +\infty[\; ; q \in \mathbb{Q} \}$.

<u>Démonstration</u> : comme $]q,+\infty[$ est un ouvert, quel que soit $q \in \mathbb{Q}$, $\sigma(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

- Montrons que $\sigma(\mathcal{Q})$ contient tous les intervalles de $\mathbb{R}$.

* si $a \in \mathbb{R}$, il existe une suite décroissante de rationnels q_n tendant vers a,

donc $]a,+\infty[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]q_n,+\infty[\in \sigma(\mathcal{Q})$ d'après l'axiome iii),

et $[a,+\infty[= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]a-\frac{1}{n},+\infty[\in \sigma(\mathcal{Q})$ d'après les axiomes ii) et iii)
et puisque $]a-\frac{1}{n},+\infty[$ quel que soit n.

D'où aussi $]-\infty, a[= [a,+\infty[^c \in \sigma(\mathcal{Q})$ d'après ii),

et $]-\infty,a] =]a,+\infty[^c$ ——————— .

* si $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $]a,b[=]-\infty,b[\cap]a,+\infty[\in \sigma(\mathcal{Q})$,

$[a,b] =]-\infty,b] \cap [a,+\infty[$ ——————— ,

$[a,b[=]-\infty,b[\cap [a,+\infty[$ ——————— ,

$]a,b] =]-\infty,b] \cap]a,+\infty[$ ——————— .

- Or tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles (ses composantes connexes).

Donc d'après l'axiome iii) $\sigma(\mathcal{Q})$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}$.

Donc $\sigma(\mathcal{Q})$ contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par définition de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. ■

On reparlera plus loin de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, dont on peut montrer qu'elle est engendrée par les pavés $\prod_{i=1}^{d} [a_i, b_i]$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$.