Chap. IX : Intégrale de Lebesgue

L'objectif de ce chapitre est de développer la théorie de l'intégration au sens de Lebesgue, qui non seulement généralise l'intégrale de Riemann à des fonctions d'une variable réelle moins "régulières" mais permet d'intégrer des fonctions par rapport à une mesure "quelconque" (pas nécessairement la mesure de Lebesgue).

Cette théorie unifiée, valable pour des fonctions définies sur un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ (que l'on supposera complet lorsque nécessaire), date du début du XX^e siècle et est notamment la base de la théorie moderne des probabilités.

Dans tout ce qui suit, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ désigne un espace mesuré fixé. Ce peut être par exemple $X = \mathbb{R}^d$ muni de la tribu et de la mesure de Lebesgue, ou encore $X = \mathbb{N}$ muni de la tribu discrète et de la mesure de comptage (ce qui permet de voir les séries comme des intégrales).

① Fonctions étagées

La théorie de l'intégration au sens de Lebesgue repose sur la notion de fonction étagée ("simple function" en anglais).

Pour simplifier, on considère des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ (que l'on pourrait remplacer par $\mathbb{R}^d$ sans difficulté...)

Définition : Une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ est dite étagée si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs $\{y_j ;\ j \in [\![1, m]\!]\}$. Dans ce cas elle s'écrit $f = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{A_j}$ avec $A_j = f^{-1}(\{y_j\})$ pour tout j

Exemples :
- Les fonctions en escalier sont étagées sur $X = [a, b]$.
- La fonction indicatrice $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est étagée sur tout intervalle de $\mathbb{R}$.

IX

Proposition : Une fonction étagée $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable si et seulement si $f^{-1}(\{y\})$ est mesurable quel que soit $y \in \mathbb{C}$.

Démonstration : • si f est mesurable alors $f^{-1}(\{y\})$ doit être mesurable puisque $\{y\}$ est un fermé donc un borélien de $\mathbb{C}$, quel que soit $y \in \mathbb{C}$. • Réciproquement, si $f^{-1}(\{y\})$ est mesurable pour tout $y \in \mathbb{C}$, et $f = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{A_j}$ avec $A_j = f^{-1}(\{y_j\})$ pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, montrons que f est mesurable. Par hypothèse, les ensembles A_j sont mesurables. De plus, pour tout borélien $B \in \mathbb{C}$, si l'on désigne par $Y = \{y_j ; j \in [\![1, m]\!]\} \cap B$, on a $f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(\{y\})$ avec Y fini, donc $f^{-1}(B)$ est mesurable. ☒

Définition : Une fonction étagée est dite sous écriture canonique, ou encore représentation standard, $f = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{A_j}$ si les valeurs y_j sont non nulles et deux à deux distinctes et si les ensembles A_j sont deux à deux disjoints.

Proposition : si $(z_k)_{k \in [\![1,N]\!]} \in \mathbb{C}^N$ et $(B_k)_{k \in [\![1,N]\!]} \in \mathcal{P}(X)^N$ pour $k \in [\![1, N]\!]$, alors la fonction $f := \sum_{k=1}^{N} z_k \mathbb{1}_{B_k}$ est étagée admet une écriture canonique unique à permutation des indices près.

Démonstration : La fonction $f = \sum_{k=1}^{N} z_k \mathbb{1}_{B_k}$ prend effectivement un nombre fini de valeurs, inclus dans $\left\{ \sum_{k \in K} z_k ; K \subset [\![1, N]\!] \right\}$ (de cardinal 2^N). Si on note $y_1, \dots, y_m$ ces valeurs, supposées deux à deux distinctes et non nulles, et $A_j = f^{-1}(\{y_j\})$ pour $j \in [\![1, m]\!]$, IV

alors on a $f = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{A_j}$. Noter que $(A_j)_{j \in [\![0,m]\!]}$ forme alors une partition de X, en posant $A_0 = f^{-1}(\{0\})$. Dans une éventuelle autre écriture canonique, le nombre de termes est encore égal à m, le nombre de valeurs non nulles prises par f, et si $f = \sum_{j=1}^{m} \tilde{y}_j \mathbb{1}_{\tilde{A}_j}$ avec les $\tilde{y}_j$ non nuls et deux à deux distincts, et les $\tilde{A}_j$ deux à deux disjoints, alors pour tout $x \in X$ il existe au plus un indice $j \in [\![1,m]\!]$ tel que $x \in \tilde{A}_j$. Ainsi, si $x \in \tilde{A}_{j_0}$ alors $f(x) = \tilde{y}_{j_0}$ (les autres termes de la somme étant nuls) et inversement, si $f(x) = \tilde{y}_{j_0} \neq 0$ alors x appartient au moins à l'un des $\tilde{A}_j$, et c'est forcément $\tilde{A}_{j_0}$.

Donc $\tilde{A}_{j_0} = f^{-1}(\{\tilde{y}_{j_0}\})$, ceci étant vrai quel que soit j_0.

Par suite, la seule possibilité puisque $\{y_j ;\ j \in [\![1,m]\!]\} = \{\tilde{y}_j ;\ j \in [\![1,m]\!]\}$ l'ensemble des valeurs non nulles prises par f, est qu'il existe une permutation σ de $[\![1,m]\!]$ telle que

$$\tilde{y}_j = y_{\sigma(j)}, \quad \tilde{A}_j = f^{-1}(\{\tilde{y}_j\}) = f^{-1}(\{y_{\sigma(j)}\}) = A_{\sigma(j)}.$$

■

Ce qui précède* vaut également pour les fonctions à valeurs dans $[0,+\infty]$ au lieu de $\mathbb{C}$. * définitions et propositions

Définition : Soit $\varphi : X \to [0,+\infty]$ une fonction étagée mesurable, de représentation standard $\varphi = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{A_j}$. Alors l'intégrale (au sens de Lebesgue) de φ sur X est

$$\int_X \varphi \, d\mu := \sum_{j=1}^{m} y_j \, \mu(A_j) \quad \in [0,+\infty]$$

On écrit aussi parfois $\int_X \varphi(x) \, d\mu(x)$. Précision : $+\infty \cdot 0 = 0$.

Proposition : Si $(z_k)_{k\in[\![1,N]\!]} \in \mathbb{C}^N$ et $(B_k)_{k\in[\![1,N]\!]} \in \mathcal{M}^N$ alors $f := \sum_{k=1}^{N} z_k \mathbb{1}_{B_k}$ est étagée mesurable et
$$\int_X f\,d\mu = \sum_{k=1}^{N} z_k\,\mu(B_k).$$

Démonstration : On ne change pas la valeur de f en supprimant les indices k pour lesquels $z_k = 0$. On peut donc supposer sans perte de généralité que $z_k \neq 0$ pour tout $k \in [\![1,N]\!]$.
L'idée est bien sûr de se ramener à la représentation standard de f, tout en s'assurant de la mesurabilité des ensembles A_j formant la partition de X associée.

- Cas le plus facile : si les B_k sont deux à deux disjoints, si $\{y_j ; j\in[\![1,m]\!]\}$ est l'ensemble des valeurs prises par f, pour tout $j \in [\![1,m]\!]$ on peut considérer $K_j := \{k\in[\![1,N]\!] ; z_k = y_j\}$.

Comme les B_k sont deux à deux disjoints, $\{z_k ; k\in[\![1,N]\!]\} = \{y_j ; j\in[\![1,m]\!]\}$ et $f^{-1}(\{y_j\}) = \bigcup_{k\in K_j} B_k$, réunion disjointe, mesurable.

Par suite
$$\int_X f\,d\mu = \sum_{j=1}^{m} y_j\,\mu\Big(\bigcup_{k\in K_j} B_k\Big) = \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{k\in K_j} \mu(B_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{N} z_k\,\mu(B_k)$$
puisque $\bigcup_{j=1}^{m} K_j = [\![1,N]\!]$.

- cas plus délicat : lorsque les B_k ne sont pas deux à deux disjoints, on peut néanmoins construire une famille $(C_\ell)_{\ell\in[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}^p$ de parties mesurables deux à deux disjointes telles que $f = \sum_{\ell=1}^{p} t_\ell \mathbb{1}_{C_\ell}$ avec
$$t_\ell := \sum_{\substack{k\in[\![1,N]\!] ;\\ C_\ell\subset B_k}} z_k, \qquad B_k = \bigcup_{\substack{\ell ;\\ C_\ell\subset B_k}} C_\ell .$$

IX

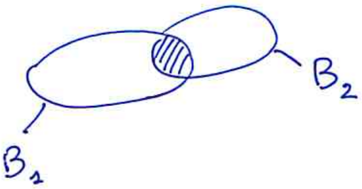
Une fois cette construction faite on est ramené au cas précédent,

car alors $\displaystyle\int_X f\,d\mu = \sum_{\ell=1}^{p} t_\ell\,\mu(C_\ell) = \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{\substack{k\,;\\ C_\ell\subset B_k}} z_k\,\mu(C_\ell) =$

$$= \sum_{k=1}^{N} z_k \sum_{\substack{\ell\,;\\ C_\ell\subset B_k}} \mu(C_\ell) = \sum_{k=1}^{N} z_k\,\mu(B_k).$$

Voyons donc cette construction. On va faire une récurrence sur N, le nombre de parties mesurables B_k.

* $N=1$: il n'y a rien à faire, on pose juste $C_1 = B_1$.
* $N=2$ (pour éclairer le passage de N à $N+1$ ensuite) :



on pose $C_1 := B_1 \setminus (B_1\cap B_2)$, $C_2 := B_2\setminus(B_1\cap B_2)$, $C_3 := B_1\cap B_2$. On a $C_\ell \in \mathcal{M}$ pour $\ell = 1,2$ ou 3.

on a alors $B_1 = C_1\cup C_3$, $B_2 = C_2\cup C_3$, et ce sont des réunions disjointes. De plus, $(z_1\chi_{B_1} + z_2\chi_{B_2})(x) = \begin{cases} z_1 & \text{si } x\in C_1,\\ z_2 & \text{si } x\in C_2,\\ z_1+z_2 & \text{si } x\in C_3.\end{cases}$

* Hypothèse de récurrence : soit $N\in\mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $(B_k)_{k\in[\![1,N]\!]} \in \mathcal{M}^N$ il existe $p_N\in\mathbb{N}^*$ et une famille $(C_\ell)_{\ell\in[\![1,p_N]\!]} \in \mathcal{M}^{p_N}$ de parties mesurables deux à deux disjointes telle que, pour tout $k\in[\![1,N]\!]$ il existe $L_k \subset [\![1,p_N]\!]$ tel que $B_k = \bigcup_{\ell\in L_k} C_\ell$.

Soit $(B_k)_{k\in[\![1,N+1]\!]} \in \mathcal{M}^{N+1}$. On applique l'hypothèse de récurrence à $(B_k)_{k\in[\![1,N]\!]}$, ce qui donne une famille $(C_\ell)_{\ell\in[\![1,p_N]\!]}$.

Chaque C_ℓ s'écrit $C_\ell = (C_\ell\cap B_{N+1})\cup(C_\ell\setminus B_{N+1})$, réunion disjointe,

et on $B_{N+1} = \bigcup_{\ell=1}^{p_N}(C_\ell\cap B_{N+1}) \cup \left(B_{N+1}\setminus\left(\bigcup_{\ell=1}^{p_N} C_\ell\right)\right)$.

En posant $C'_\ell := C_\ell\cap B_{N+1}$, $C'_{p_N+\ell} := C_\ell\setminus B_{N+1}$, $C'_{2p_N+1} = B_{N+1}\setminus\left(\bigcup_{\ell=1}^{p_N} C_\ell\right)$,

$p_{N+1} = 2p_N + 1$, on a bien une famille $(C'_\ell)_{\ell \in [\![1, p_{N+1}]\!]} \in \mathcal{M}^{p_{N+1}}$ de parties mesurables deux à deux disjointes telle que pour tout $k \in [\![1, N+1]\!]$, B_k est une réunion de telles parties.

② Propriétés de l'intégrale des fonctions étagées mesurables

On démontre sans peine les résultats énoncés ci-dessous.

Proposition : si $\lambda \in \mathbb{R}^+$, si $f, g : X \to [0, +\infty[$ sont étagées mesurables,

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu \qquad \text{(additivité)}$$

$$\int_X (\lambda f)\, d\mu = \lambda \int_X f\, d\mu \qquad \text{(homogénéité)}$$

Si $f \leq g$ alors $\displaystyle\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$ (monotonie)

En particulier, on a $\displaystyle\int_A f\, d\mu := \int_X f\, \mathbb{1}_A\, d\mu \leq \int_X f\, d\mu$.

Proposition : soit $f : X \to [0, +\infty[$ une fonction étagée mesurable. Pour tout $A \in \mathcal{M}$ on pose $\nu(A) = \displaystyle\int_A f\, d\mu$. Alors ν est une mesure.

Démonstration : • $\nu(\emptyset) = \displaystyle\int_X f\, \mathbb{1}_\emptyset\, d\mu = 0$.

• si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$, les A_n étant deux à deux disjoints, soit $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Si $f = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{B_j}$, représentation standard,

$$\nu(A) = \int_X \sum_{j=1}^{m} y_j \underbrace{\chi_A \chi_{B_j}}_{\chi_{A\cap B_j}}\, d\mu = \sum_{j=1}^{m} y_j\, \mu(A \cap B_j), \text{ avec}$$

$A \cap B_j = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B_j)$, réunion disjointe.

Donc $\mu(A \cap B_j) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n \cap B_j)$.

Comme on ne somme que des éléments de $[0,+\infty]$, on peut intervertir $\sum_{j=1}^{m}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$, de sorte que

$$\nu(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{m} y_j \, \mu(A_n \cap B_j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} f \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(A_n)$$

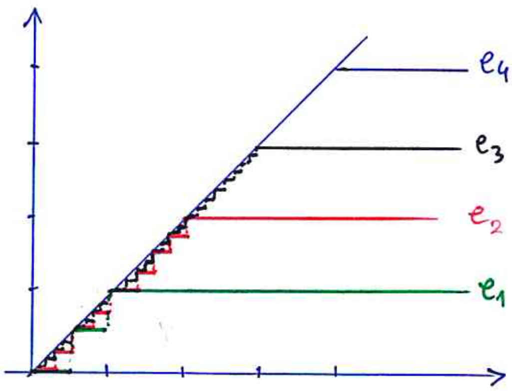
③ Intégration des fonctions mesurables positives

a) Approximation par des fonctions étagées

Proposition : Soit $f : X \to [0,+\infty]$ mesurable. Alors il existe une suite croissante de fonctions étagées mesurables à valeurs dans $[0,+\infty[$ convergeant simplement vers f.

Démonstration : L'idée est de tronquer f, et de la composer avec une fonction en escalier (exercice : vérifier qu'une fonction en escalier sur un segment $[a,b]$ est mesurable).

On construit des fonctions auxiliaires e_n à cet effet. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.



Soit $\varphi_n(t) = 2^{-n} \lfloor 2^n t \rfloor$ pour $t \in [0,n]$.

C'est une fonction en escalier, donc étagée mesurable.

Soit $e_n = \varphi_n \mathbb{1}_{[0,n]} + n \, \mathbb{1}_{[n,+\infty]}$.

C'est une fonction étagée mesurable.

Et elle est telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $e_n(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} t$, car pour $n > t$, $e_n(t) = \varphi_n(t)$ et $\varphi_n(t) \leq t < \varphi_n(t) + 2^{-n}$.

De plus, $e_n(+\infty) = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Par suite, $f_n := e_n \circ f$ fournit la suite cherchée : f_n est étagée mesurable car e_n l'est et f est mesurable ; $f_n \leq f_{n+1}$ car $e_n \leq e_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; pour tout $x \in X$, $f_n(x) = e_n(f(x)) \longrightarrow f(x)$ puisque $e_n(t) \to t = f(x)$. ☒

b) Définition et premières propriétés de l'intégrale

Définition : Soit $f : X \to [0,+\infty]$ mesurable. L'intégrale de f par rapport à la mesure μ est

$$\int_X f\,d\mu := \sup\left\{ \int_X h\,d\mu \; ; \; h : X \to [0,+\infty[\text{ étagée mesurable et } h \leq f \right\} \in [0,+\infty].$$

Si $E \in \mathcal{M}$, on définit aussi $\int_E f\,d\mu = \int_X f\,\mathbb{1}_E\,d\mu$.

On remarque que cette définition est cohérente avec celle de l'intégrale des fonctions étagées mesurables.

Proposition : si $f,g : X \to [0,+\infty]$ sont mesurables, si $\alpha \in \mathbb{R}^+$,

$$\int_X (\alpha f)\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu \qquad \text{(homogénéité)}$$

si $f \leq g$ alors $\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$ (monotonie).

Si $A \subset B$ avec A et B mesurables, $\int_A f\,d\mu \leq \int_B f\,d\mu$.

Démonstration : ces propriétés se déduisent bien sûr de celles qu'on connaît déjà pour les fonctions étagées.

- Pour $\alpha = 0$, il n'y a rien à démontrer. Pour $\alpha > 0$, si h est étagée mesurable à valeurs dans $[0,+\infty[$, $h \leq f$ équivaut à $\alpha h \leq \alpha f$.

Soit $h : X \to [0,+\infty[$ étagée mesurable telle que $h \leq f$. Alors αh est étagée mesurable à valeurs dans $[0,+\infty[$ et $\alpha h \leq \alpha f$. Donc

$$\int_X (\alpha h)\, d\mu \leq \int_X (\alpha f)\, d\mu. \qquad \text{Or } \int_X (\alpha h)\, d\mu = \alpha \int_X h\, d\mu.$$

Donc $\alpha \int_X h\, d\mu \leq \int_X (\alpha f)\, d\mu$. Ceci étant vrai quelle que soit h, on en déduit que

$$\alpha \int_X f\, d\mu = \alpha \sup \left\{ \int_X h\, d\mu \;;\; h : X \to [0,+\infty[, \text{ étagée mesurable; } h \leq f \right\} \leq \int_X (\alpha f)\, d\mu.$$

Par ailleurs, si $h : X \to [0,+\infty[$ est étagée mesurable telle que $h \leq f$, on a $\int_X h\, d\mu \leq \int_X f\, d\mu$ donc $\alpha \int_X h\, d\mu = \int_X (\alpha h)\, d\mu \leq \alpha \int_X f\, d\mu$.

Ceci étant vrai quelle que soit h on en déduit $\int_X (\alpha f)\, d\mu \leq \alpha \int_X f\, d\mu$.

- Si $f \leq g$ et $h : X \to [0,+\infty[$ étagée mesurable telle que $h \leq f$, alors $h \leq g$. Donc $\int_X h\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$. Ceci étant vrai quelle que soit $h \leq f$, on en déduit $\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$.

- Si $A \subset B$ avec A et B mesurables alors $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$, donc $\mathbb{1}_A f \leq \mathbb{1}_B f$ et ainsi $\int_A f\, d\mu = \int_X \mathbb{1}_A f\, d\mu \leq \int_X \mathbb{1}_B f\, d\mu = \int_B f\, d\mu$. ☐

④ Premiers théorèmes fondamentaux

Théorème de Beppo Levi (convergence monotone) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables $f_n : X \to [0,+\infty]$. Soit f sa limite (simple). Alors f est mesurable et $\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu$

Attention, l'hypothèse porte sur la monotonie de la suite (qui assure l'existence de la limite) et pas sur les fonctions elles-même.

Démonstration : on a déjà vu que la limite d'une suite de fonctions mesurables était mesurable. De plus, comme les f_n sont à valeurs dans $[0,+\infty]$, f aussi.

Notons $\alpha_n := \int_X f_n \, d\mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $f_n \leq f_{n+1}$ par hypothèse, on a $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$. Donc la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,+\infty]^{\mathbb{N}}$ admet une limite $\alpha \in [0,+\infty]$. Le but est de démontrer que $\alpha = \int_X f \, d\mu$.

On obtient facilement l'inégalité $\alpha \leq \int_X f \, d\mu$, car $f_n \leq f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant à nouveau la monotonie de l'intégrale.

Pour démontrer que $\int_X f \, d\mu \leq \alpha$, il suffit de montrer que $\int_X h \, d\mu \leq \alpha$, quelle que soit $h : X \to [0,+\infty[$ étagée mesurable telle que $h \leq f$.

Cependant, on n'y arrive pas directement. On va commencer par montrer que pour tout $c \in]0,1[$, $c \int_X h \, d\mu \leq \alpha$, ce qui impliquera l'inégalité voulue $\int_X h \, d\mu \leq \alpha$ en faisant tendre c vers 1.

Soit donc $c \in]0,1[$ et $h : X : [0,+\infty[$ étagée mesurable t.q $h \leq f$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n := \{x \in X ; f_n(x) \geq c\,h(x)\}$.

On a $A_n = (f_n - c\,h)^{-1}([0,+\infty])$, donc A_n est mesurable.

De plus, comme $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ pour tout $x \in X$, si $x \in A_n$ alors $x \in A_{n+1}$. Autrement dit, $A_n \subset A_{n+1}$.

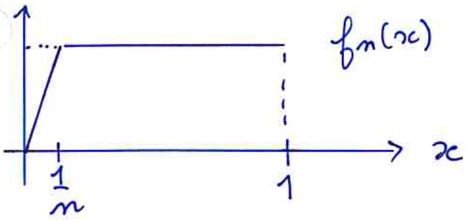
Enfin, quel que soit $x \in X$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante tendant vers $f(x)$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(x) \geq c\,h(x)$ (car ou bien $h(x) = 0$ ou bien $c\,h(x) < h(x) \leq f(x)$), de sorte que $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Autrement dit, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$.

Donc, en posant $\nu(A) = \int_A h \, d\mu$ pour toute partie mesurable A, ce qui définit une mesure, on a $\nu(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \nu(X) = \int_X h \, d\mu$.

Or $\alpha \geqslant \alpha_n = \int_X f_n \, d\mu \geqslant \int_{A_n} f_n \, d\mu \geqslant \int_{A_n} c\, h \, d\mu = c \int_{A_n} h \, d\mu = c\, \nu(A_n)$.

Donc en passant à la limite on obtient $\alpha \geqslant c\,\nu(X) = \int_X h \, d\mu$.

Exemple d'application : Soit $f_n = n \, \mathrm{id} \, \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]} + \mathbb{1}_{]\frac{1}{n}, 1]}$, $n \in \mathbb{N}^*$.



Ceci définit une suite croissante de fonctions mesurables (elles aussi croissantes mais cela n'a pas d'importance !).

Donc $\int_0^1 f_n \, d\lambda \longrightarrow \int_0^1 f \, d\lambda = 1$, puisque $f = \lim (f_n) = \mathbb{1}_{]0,1]}$.

Noter que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Définition : on dit qu'une fonction $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ est intégrable si elle est mesurable et $\int_X f \, d\mu < +\infty$.

Proposition : si $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ est intégrable, alors $\mu(\{x \in X ; f(x) = +\infty\}) = 0$.

Démonstration : soit $A = \{x \in X ; f(x) = +\infty\}$. Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on a $\alpha \mathbb{1}_A \leqslant f$. Donc $\underbrace{\int_X \alpha \mathbb{1}_A \, d\mu}_{\alpha \mu(A)} \leqslant \int_X f \, d\mu < +\infty$.

Ceci étant vrai quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$, si on avait $\mu(A) > 0$ on obtiendrait une contradiction en faisant tendre α vers $+\infty$.

Comme conséquence du théorème de convergence monotone on a :

<u>Corollaire</u> : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions intégrables $f_n : X \to [0,+\infty]$. Soit $f = \lim(f_n)$. Alors f est intégrable si et seulement si la suite $\left(\int_X f_n \, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Si c'est le cas alors $\int_X f \, d\mu = \sup_n \int_X f_n \, d\mu$.

En effet, la suite croissante $\left(\int_X f_n \, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie si et seulement si elle est majorée. Et cette limite est $\int_X f \, d\mu$, qui vaut donc $\sup_n \int_X f_n \, d\mu$ lorsqu'elle est finie. ▨

Une conséquence encore plus importante du théorème de convergence monotone est que l'on a bien l'additivité de l'intégrale.

<u>Proposition</u> : Si $f, g : X \to [0,+\infty]$ sont mesurables alors $f+g$ aussi et $\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$.

<u>Démonstration</u> : on rappelle que cette propriété est connue pour les fonctions étagées mesurables à valeurs dans $[0,+\infty[$.
De plus, il existe des suites croissantes $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées mesurables à valeurs dans $[0,+\infty[$ telles que $f_n \to f$ et $g_n \to g$.

Quel que soit $n\in\mathbb{N}$, $\int_X (f_n+g_n) \, d\mu = \int_X f_n \, d\mu + \int_X g_n \, d\mu$.

D'après le théorème de convergence monotone, $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$, $\int_X g_n \, d\mu \to \int_X g \, d\mu$, de même que $\int_X (f_n+g_n) \, d\mu \to \int_X (f+g) \, d\mu$ car la suite $(f_n+g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi croissante. ▨

En utilisant cette propriété d'additivité, on peut aussi déduire du théorème de convergence monotone un résultat analogue pour les suites décroissantes, au prix d'une hypothèse supplémentaire.

<u>Corollaire</u> : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables $f_n : X \to [0,+\infty[$. Soit $f = \lim(f_n)$. Si f_0 est intégrable alors $\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu$.

Noter que l'hypothèse entraîne que toutes les fonctions f_n sont intégrables.

<u>Démonstration</u> : on peut toujours appliquer le théorème de convergence monotone à la suite croissante $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $g_n = f_0 - f_n$.

Ceci implique que $\int_X (f_0 - f_n)\, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X (f_0 - f)\, d\mu$.

Par ailleurs, on a $f_0 = f_0 - f_n + f_n$ et $f_0 = f_0 - f + f$,

donc $\int_X f_0\, d\mu = \int_X (f_0 - f_n)\, d\mu + \int_X f_n\, d\mu$ et $\int_X f_0\, d\mu = \int_X (f_0 - f)\, d\mu + \int_X f\, d\mu$,

ce que l'on peut également écrire, puisque $\int_X f_0\, d\mu < +\infty$,

$$\int_X f_n\, d\mu = \int_X f_0\, d\mu - \int_X (f_0 - f_n)\, d\mu \quad \text{et} \quad \int_X f\, d\mu = \int_X f_0\, d\mu - \int_X (f_0 - f)\, d\mu.$$

On en déduit que $\int_X f_n\, d\mu$ a pour limite $\int_X f_0\, d\mu - \int_X (f_0 - f)\, d\mu = \int_X f\, d\mu$. ∎

Attention, ce résultat est faux si l'on omet l'hypothèse $\int_X f_0\, d\mu < +\infty$.

Par exemple pour $f_n = \mathbb{1}_{[n,+\infty[}$: $\int_{\mathbb{R}} f_0\, d\lambda = +\infty$, et même $\int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, tandis que $f_n \to 0$. On a ainsi

$$\lim \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda = +\infty \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} (\lim f_n)\, d\lambda = 0.$$

IX

Par ailleurs, on ne peut en général pas passer à la limite en l'absence de monotonie.

<u>Exemples</u>: • pour $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$, on a $f_n \longrightarrow 0$, $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = 1 \neq 0$.

• pour $f_n = n\,\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$, on a $f_n \longrightarrow (+\infty)\,\mathbb{1}_{\{0\}}$,

$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = 1$, $\int_{\mathbb{R}} (\lim f_n)\, d\lambda = 0$ (le zéro "l'emporte" dans la multiplication avec $+\infty$).

Effectivement, (f_n) n'est ni croissante ni décroissante :

$$f_{n+1}\left(\tfrac{1}{n}\right) = 0 < f_{n-1}\left(\tfrac{1}{n}\right) = n-1 < f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = n.$$

Une autre conséquence fondamentale du théorème de convergence monotone est le lemme (!) de Fatou (duquel on pourrait en fait déduire le théorème de convergence monotone).

<u>Lemme de Fatou</u> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $f_n : X \to [0,+\infty]$. Alors $\liminf(f_n)$ est mesurable et

$$\int_X \liminf(f_n)\, d\mu \leq \liminf\left(\int_X f_n \, d\mu\right).$$

<u>Démonstration</u> : on rappelle que $\liminf(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf\{f_k \,;\, k \geq n\}$.

Si on pose $F_n := \inf\{f_k \,;\, k\geq n\}$, $F_n : X \to [0,+\infty]$ est mesurable et la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Donc d'après le théorème de convergence monotone, $\int_X \underbrace{\lim_{n\to\infty}(F_n)}_{\liminf(f_n)_{n\in\mathbb{N}}} d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X F_n \, d\mu$. De plus, $F_n \leq f_k$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $k\geq n$, donc $\int_X F_n \, d\mu \leq \int_X f_k \, d\mu$.

Par suite $\lim_{n\to\infty} \int_X F_n \, d\mu \leq \liminf\left(\int_X f_n \, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$. $\blacksquare$

Démonstration du théorème de Beppo-Levi à partir du lemme de Fatou.

Supposons le lemme de Fatou démontré. Si (f_n) est une suite croissante de fonctions mesurables $f_n : X \to [0,+\infty]$ de limite f, si $F_n = \inf\{f_k ; k \geqslant n\}$, on a $F_n \leq f_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \geqslant n$. D'où en faisant tendre k vers $+\infty$, $F_n \leqslant f$, et donc $\int_X F_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, on a en fait $F_n = f_n$, et donc $\liminf \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$.

Par ailleurs, le lemme de Fatou montre que $\int_X f \, d\mu \leq \liminf \int_X f_n \, d\mu$.

On a donc $\int_X f \, d\mu = \liminf \int_X f_n \, d\mu$. Mais en fait cette limite inf est une limite tout court, car la suite $\left(\int_X f_n \, d\mu\right)$ est monotone. ∎

Donnons enfin un résultat d'interversion entre somme de série et intégrale.

Théorème : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : X \to [0,+\infty]$ mesurables. Soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Alors f est mesurable et
$$\int_X f\,d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n\,d\mu.$$

Démonstration : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $F_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.
C'est une fonction mesurable et la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, de limite f. Donc f est mesurable et $\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X F_n\,d\mu$ d'après le théorème de convergence monotone.
Or par additivité de l'intégrale, $\int_X F_n\,d\mu = \sum_{k=0}^{n}\int_X f_k\,d\mu$.
Donc $\lim_{n\to\infty}\int_X F_n\,d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_X f_k\,d\mu$. ▣

Remarque : on verra plus loin que pour les fonctions d'une variable réelle intégrables au sens de Riemann sur un segment, leur intégrale de Riemann coïncide avec leur intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue sur ce segment ; on aura aussi un résultat analogue pour les intégrales généralisées absolument convergentes. Par conséquent, les théorèmes généraux que l'on vient de voir s'appliquent en particulier aux intégrales de Riemann.

⑤ Presque partout

Définition : Si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré, on dit qu'une propriété portant sur des éléments de X est vraie μ-presque partout (ou simplement, presque partout, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité possible sur la mesure utilisée) si l'ensemble des éléments de X où cette propriété est fausse est mesurable et de mesure nulle.

Par exemple, si $f : X \to [0, +\infty]$ est intégrable, alors $f < +\infty$ presque partout, d'après la proposition vue p. 11.

Proposition: Soit $f : X \to [0, +\infty]$ mesurable. Alors $\int_X f \, d\mu = 0$ si et seulement si $f = 0$ μ-presque partout.

Démonstration : • si $f = 0$ μ-presque partout, si $h : X \to [0, +\infty[$ est étagée mesurable et telle que $h \leq f$ alors $\{x \in X ; h(x) > 0\} \subset \{x \in X ; f(x) > 0\}$ est de mesure nulle. Donc $\int_X h \, d\mu = 0$, car $h = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{A_j}$ avec $y_j > 0$, $A_j \subset \{x \in X ; h(x) > 0\}$, donc $\mu(A_j) = 0$.

Par suite, $\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X h \, d\mu ; \; h : X \to [0, +\infty[\text{ étagée mesurable}, \; h \leq f \right\} = 0$.

• Réciproquement, si $\int_X f \, d\mu = 0$, montrons que $E := \{x \in X ; f(x) > 0\}$ est de mesure nulle.

On remarque que $E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} E_m$, $E_m := \{x \in X ; f(x) \geq \frac{1}{m}\}$.

Chaque ensemble E_m est mesurable puisque f est mesurable et $E_m = f^{-1}([\frac{1}{m}, +\infty])$, et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $E_m \subset E_{m+1}$. Donc $\mu(E_m) \xrightarrow[m \to \infty]{} \mu(E)$.

Par ailleurs, on a $0 = \int_X f\,d\mu \geqslant \int_{E_n} f\,d\mu \geqslant \frac{1}{n}\mu(E_n)$.

Donc $\mu(E_n) = 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'où $\mu(E) = 0$. $\boxtimes$

Remarque: on a utilisé au passage un résultat très utile, qui mérite un énoncé à lui tout seul.

Proposition: Soit $f : X \to [0, +\infty]$ mesurable. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$ on a $\mu(\{x \in X ;\ f(x) \geqslant a\}) \leqslant \frac{1}{a}\int_X f\,d\mu$. (inégalité de Markov)

Démonstration: Soit $A = \{x \in X ;\ f(x) \geqslant a\}$. Alors

$\int_X f\,d\mu \geqslant \int_A f\,d\mu \geqslant a\mu(A)$. $\boxtimes$

Du point de vue de la théorie de l'intégration au sens de Lebesgue, deux fonctions coïncidant presque partout sont « presque » identiques.

Proposition: Soient $f, g : X \to [0, +\infty[$ mesurables et telles que $f = g$ presque partout. Alors $\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu$. En particulier, f est intégrable si et seulement si g l'est.

Démonstration: La fonction $h := \min(f, g) : X \to [0, +\infty[$ est mesurable et on a $f - h = g - h = 0$ presque partout, avec $f - h,\ g - h : X \to [0, +\infty[$.

Donc $\int_X (f-h)\,d\mu = \int_X (g-h)\,d\mu = 0$. Or $f = f - h + h$, $g = g - h + h$

D'où $\int_X f\,d\mu = \int_X h\,d\mu = \int_X g\,d\mu$ par additivité de l'intégrale. $\boxtimes$

Théorème : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions $f_n : X \to [0,+\infty]$ mesurables, tendant μ-presque partout vers une fonction f mesurable. Alors $\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$.

On peut voir ce résultat comme une variante du théorème de convergence monotone. Noter toutefois que la mesurabilité de la limite f fait partie des hypothèses et non de la conclusion !

Démonstration : Il existe N mesurable de mesure nulle tel que, pour tout $x \in A := X \setminus N$, $f_n(x) \to f(x)$ quand $n\to\infty$.

On a $f_n = g_n + f_n \mathbb{1}_N$, $f = g + f\mathbb{1}_N$ avec $g_n := f_n \mathbb{1}_A$, $g := f\mathbb{1}_A$. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est, et tend vers g. De plus les fonctions $g_n : X \to [0,+\infty]$ sont mesurables puisque les f_n le sont et l'ensemble A est mesurable.
Donc d'après le théorème de convergence monotone, $\int_X g_n\,d\mu$ tend vers $\int_X g\,d\mu$ lorsque $n\to\infty$.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $\int_X g_n\,d\mu = \int_X f_n\,d\mu$ puisque g_n et f_n coïncident presque partout, et on a aussi $\int_X g\,d\mu = \int_X f\,d\mu$ puisque g et f coïncident presque partout, les deux étant mesurables.
Donc $\int_X f_n\,d\mu$ tend bien vers $\int_X f\,d\mu$. ∎

Lorsque l'espace mesuré $(X,\mathcal{M},\mu)$ est complet, la mesurabilité de la limite est en fait automatique. C'est un résultat valable même si la suite n'est pas croissante.

Proposition : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : X \to [0,+\infty]$ mesurables tendant μ-presque partout vers une fonction f.
Si la mesure μ est complète alors f est nécessairement mesurable.

Démonstration : Il suffit de montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $f^{-1}([a,+\infty])$ est mesurable. Or f_n tend vers f dans $A := X \setminus N$ on a $f^{-1}([a,+\infty]) = \{x \in A \,;\, f(x) \geqslant a\} \cup \{x \in N \,;\, f(x) \geqslant a\}$, avec N mesurable de mesure nulle.
L'ensemble $\{x \in N \,;\, f(x) \geqslant a\}$ est alors négligeable, donc mesurable et de mesure nulle puisque la mesure est complète.
Quant à $\{x \in A \,;\, f(x) \geqslant a\} = (f \mathbb{1}_A)^{-1}([a,+\infty])$, il est mesurable car la fonction $f\mathbb{1}_A$ est mesurable, comme limite de la suite de fonctions mesurables $f_n \mathbb{1}_A$, l'ensemble A étant mesurable et les fonctions f_n aussi par hypothèse.
Donc $f^{-1}([a,+\infty])$ est mesurable comme réunion d'ensembles mesurables.

$\boxtimes$

⑥ Mesures à densité

Proposition : Soit $f : X \to [0,+\infty]$ mesurable. Alors l'application

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{M} &\longrightarrow [0,+\infty] \\ A &\mapsto \nu(A) = \int_A f \, d\mu \end{aligned}$$

définit une mesure sur $\mathcal{M}$.

Ce résultat généralise celui qu'on a déjà vu pour les fonctions étagées mesurables.

Définition : Une mesure ν telle que $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$ pour toute partie mesurable A, avec f une fonction mesurable fixée, est dite à densité par rapport à μ. La fonction f est sa densité par rapport à μ.

Démonstration de la proposition :

- $\nu(\emptyset) = \int_X f \, \mathbb{1}_\emptyset \, d\mu = 0$
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$, les A_n étant deux à deux disjoints,

soit $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On a alors $\mathbb{1}_A = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}$, et d'après le théorème d'interversion entre sommation et intégrale,

$$\nu(A) = \int_X f \, \mathbb{1}_A \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f \, \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(A_n), \text{ par définition de } \nu.$$

$\boxed{\text{S}}$

Remarque : si $\mu(A)=0$, alors $f \mathbb{1}_A$ est nulle presque partout et donc $\nu(A) = \int_X f \, \mathbb{1}_A \, d\mu = 0$.

Définition : si μ et ν sont deux mesures sur un espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ telles que, pour tout $A \in \mathcal{M}$, si $\mu(A)=0$ alors $\nu(A)=0$, on dit que la mesure ν est absolument continue par rapport à la mesure μ.

Ainsi, toute mesure à densité par rapport à μ est absolument continue par rapport à μ.

Il y a une sorte de réciproque à cet énoncé, en supposant une propriété supplémentaire sur les mesures, qui découle du théorème de Radon-Nikodym. Celui-ci sort du programme de l'UE.

Proposition : Soit $f : X \to [0,+\infty]$ mesurable et ν la mesure de densité f. Pour toute fonction $g : X \to [0,+\infty]$ mesurable on a

$$\int_X g \, d\nu = \int_X g f \, d\mu.$$

Démonstration : L'égalité est vraie par définition de ν si g est une fonction indicatrice d'ensemble mesurable.

On en déduit qu'elle est vraie également si $g : X \to [0,+\infty[$ est étagée mesurable, car alors par additivité et homogénéité des intégrales par rapport à ν et à μ, si $g = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{A_j}$)

$$\int_X g \, d\nu = \sum_{j=1}^{m} y_j \, \nu(A_j) = \sum_{j=1}^{m} y_j \int_X \mathbb{1}_{A_j} f \, d\mu = \int_X g f \, d\mu.$$

De façon générale, il existe une suite croissante de fonctions étagées mesurables $g_n : X \to [0,+\infty[$ tendant vers g.

D'après ce qui précède on a $\int_X g_n \, d\nu = \int_X g_n f \, d\mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En appliquant le théorème de convergence monotone aux deux membres, on obtient $\int_X g \, d\nu = \int_X g f \, d\mu$. ⊠

⑦ Intégration au sens de Lebesgue des fonctions à valeurs réelles

Jusqu'à présent on n'a intégré que des fonctions à valeurs positives.

Pour les fonctions à valeurs réelles "quelconques" on va se ramener à des fonctions à valeurs positives. En effet, pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable, on a $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$, avec $f_+ := \max(f,0)$ et $f_- := \max(-f,0)$ mesurables. Noter que $0 \leq f_+ \leq |f|$ et $0 \leq f_- \leq |f|$.

Donc f_+ et f_- sont intégrables si $|f|$ l'est.

Définition : Soit $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable. On dit que f est intégrable par rapport à μ si $|f|$ est intégrable, c'est-à-dire que $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$. Si c'est le cas, on pose : $\int_X f \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu$.

Remarque : l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles intégrable est nécessairement un réel. Bien sûr, si f est à valeurs positives, son intégrale est celle définie plus haut, puisqu'alors $f = f_+$ et $f_- = 0$.

Attention : on dit juste intégrable, pas "absolument intégrable" (notion utilisée pour les intégrales de Riemann généralisées par exemple).

Proposition : L'ensemble $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu) := \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ intégrable} \}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et l'application $I : f \mapsto \int_X f \, d\mu$ est linéaire de cet espace dans $\mathbb{R}$.

Démonstration :

- on sait déjà que l'ensemble des fonctions mesurables est un espace vectoriel.
- Vérifions que si f et g sont intégrables alors $f+g$ l'est et $\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$.

Comme $|f+g| \leq |f| + |g|$, par monotonie et additivité de l'intégrale des fonctions positives, $\int_X |f+g| \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu + \int_X |g| \, d\mu < +\infty$ si f et g sont intégrables. Donc $f+g$ l'est aussi.

De plus, on a $(f+g)_+ - (f+g)_- = f+g = f_+ - f_- + g_+ - g_-$, d'où $(f+g)_+ + f_- + g_- = (f+g)_- + f_+ + g_+$. Par l'additivité de l'intégrale des fonctions positives, on en déduit l'égalité :

$$\int_X (f+g)_+ \, d\mu + \int_X f_- \, d\mu + \int_X g_- \, d\mu = \int_X (f+g)_- \, d\mu + \int_X f_+ \, d\mu + \int_X g_+ \, d\mu.$$

D'où $\int_X (f+g)_+ d\mu - \int_X (f+g)_- d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu + \int_X g_+ d\mu - \int_X g_- d\mu$,

c'est-à-dire $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.

- si f est intégrable, si $\lambda \in \mathbb{R}^+$ alors $(\lambda f)_+ = \lambda f_+$, $(\lambda f)_- = \lambda f_-$,

  d'où $\int_X (\lambda f) d\mu = \lambda \int_X f_+ d\mu - \lambda \int_X f_- d\mu = \lambda \int_X f d\mu$,

  grâce à l'homogénéité de l'intégrale des fonctions positives.

  Si maintenant $\lambda < 0$, $(\lambda f)_+ = (-\lambda) f_-$, $(\lambda f)_- = (-\lambda) f_+$,

  d'où $\int_X (\lambda f) d\mu = (-\lambda) \int_X f_- d\mu - (-\lambda) \int_X f_+ d\mu = \lambda \int_X f d\mu$ encore.

(Dans les deux cas λf est intégrable puisque $|\lambda f| = |\lambda|\, |f|$ l'est.) ⊠

<u>Proposition</u> (inégalité "triangulaire")

Si $f : X \to \mathbb{R}$ est intégrable alors $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$.

<u>Démonstration</u> : ceci résulte de la définition de l'intégrale et de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$. En effet, $\left|\int_X f d\mu\right| =$

$\left|\int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu\right| \leq \left|\int_X f_+ d\mu\right| + \left|\int_X f_- d\mu\right| = \int_X f_+ d\mu + \int_X f_- d\mu$

$= \int_X |f| d\mu$ puisque $|f| = f_+ + f_-$. ⊠

<u>Remarque</u> : L'application $f \longmapsto \int_X |f| d\mu$ définit une semi-norme sur $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$, car on a

* l'inégalité triangulaire : quelles que soient les fonctions f et g intégrables, $|f+g| \leq |f| + |g|$ donc $\int_X |f+g| d\mu \leq \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu$;

* l'"homogénéité" : quelle que soit la fonction f intégrable, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_X |\lambda f| d\mu = |\lambda| \int_X |f| d\mu$.

Mais $\int_X |f|\, d\mu = 0$ implique "seulement" que f est nulle presque partout, pas que f est nulle. On en reparlera dans le chapitre sur les espaces L^p.

La monotonie de l'intégrale s'étend aux fonctions à valeurs réelles.

Proposition : si $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont intégrables et $f \leq g$ alors $\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$.

Démonstration : on sait que $f \geqslant 0$ implique $\int_X f\, d\mu \geqslant 0$.
En écrivant $g = g - f + f$, on a $\int_X g\, d\mu = \int_X (g-f)\, d\mu + \int_X f\, d\mu$, avec $\int_X (g-f)\, d\mu \geqslant 0$ puisque $g - f \geqslant 0$. ☒

On peut énoncer toutes sortes de conditions nécessaires ou suffisantes pour qu'une fonction soit intégrable.

Proposition : Soit $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable.

- si f est bornée alors elle est intégrable sur toute partie mesurable de mesure finie.
- s'il existe $g : X \to [0, +\infty]$ intégrable telle que $|f| \leq g$ (on dit que g domine f) alors f est intégrable. De même si $|f| \leq g$ μ-presque partout
- si f est intégrable alors $\{x \in X ;\ f(x) \neq 0\}$ est σ-fini, c'est-à-dire que c'est une réunion dénombrable d'ensembles mesurables de mesure finie.

Démonstration : • si f est bornée et $A \in \mathcal{M}$ avec $\mu(A) < +\infty$, alors $\int_A |f|\, d\mu \leq C \mu(A) < +\infty$, avec C un majorant de $|f|$ dans $\mathbb{R}$.

• si $|f| \leq g$ alors $\int_X |f|\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu < +\infty$ si g est intégrable.
Si $|f| \leq g$ dans N^c avec $\mu(N) = 0$, $|f| = |f|\, \mathbb{1}_{N^c}$ μ-p.p. et donc $\int_X |f|\, d\mu =$
$\int_{N^c} |f|\, d\mu \leq \int_{N^c} g\, d\mu = \int_X g\, d\mu$.

- $\{x \in X ; f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{x \in X ; |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$,

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu(\{x \in X ; |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}) \leq n \int_X |f| \, d\mu < +\infty$.

$\boxtimes$

⑧ Intégration au sens de Lebesgue des fonctions à valeurs complexes

On rappelle que si $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable alors $\mathrm{Re} f$, $\mathrm{Im} f$ et $|f|$ aussi. De plus, comme $|\mathrm{Re} f| \leq |f|$ et $|\mathrm{Im} f| \leq |f|$, $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont intégrables si $|f|$ l'est.

Définition : Soit $f : X \to \mathbb{C}$ mesurable. On dit que f est intégrable si $|f|$ l'est. Si c'est le cas, on pose $\int_X f \, d\mu = \int_X \mathrm{Re} f \, d\mu + i \int_X \mathrm{Im} f \, d\mu$.
Pour tout $A \in \mathcal{M}$, on dit que f est intégrable sur A si $\int_A |f| \, d\mu < +\infty$, et si c'est le cas on pose $\int_A f \, d\mu = \int_X f \, \mathbb{1}_A \, d\mu$.

Les propriétés de l'intégrale vues pour les fonctions à valeurs réelles se généralisent pour les fonctions à valeurs complexes.

Proposition : 1) L'ensemble $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M}, \mu) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ intégrable}\}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et l'application $f \mapsto \int_X f \, d\mu$ est linéaire de cet espace dans $\mathbb{C}$.

2) Quelle que soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ on a $\left|\int_X f \, d\mu\right| \leq \int_X |f| \, d\mu$, avec égalité si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f = e^{i\theta} |f|$ μ-presque partout.

3) L'application $f \mapsto \int_X |f| \, d\mu$ définit une semi-norme sur $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M}, \mu)$.

4) Si $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable et bornée elle est intégrable sur toute partie mesurable de mesure finie.

5) S'il existe $g : X \to [0, +\infty]$ intégrable telle que $|f| \leq g$, si $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable alors elle est intégrable.

6) Si $f : X \to \mathbb{C}$ est intégrable alors $\{x \in X ; f(x) \neq 0\}$ est σ-fini.

La seule affirmation qui mérite de s'y attarder est 2).

- si $\int_X f\,d\mu = 0$ alors l'inégalité $\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu$ est évidente,
  avec égalité ssi $f=0$ p.p.
- supposons désormais $\int_X f\,d\mu \neq 0$.

Posons $\lambda = \frac{|\int_X f d\mu|}{\int_X f d\mu}$. On a $|\lambda| = 1$ et $\left|\int_X f\,d\mu\right| = \lambda \int_X f\,d\mu = \int_X (\lambda f)\,d\mu$.

Par suite, $\left|\int_X f\,d\mu\right| = \mathrm{Re}\left(\int_X (\lambda f)\,d\mu\right) = \int_X \mathrm{Re}(\lambda f)\,d\mu \leq \left|\int_X \mathrm{Re}(\lambda f)\,d\mu\right|$

$$\leq \int_X |\mathrm{Re}(\lambda f)|\,d\mu \leq \int_X |\lambda f|\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu.$$

Ceci montre l'inégalité voulue. En cas d'égalité on a

$$\int_X \mathrm{Re}(\lambda f)\,d\mu = \left|\int_X \mathrm{Re}(\lambda f)\,d\mu\right| = \int_X |\mathrm{Re}(\lambda f)|\,d\mu = \int_X |\lambda f|\,d\mu.$$

Ainsi $\int_X (|\lambda f| - \mathrm{Re}(\lambda f))\,d\mu = 0$, sachant que $|\lambda f| - \mathrm{Re}(\lambda f) \geq 0$.

Donc $|\lambda f| = \mathrm{Re}(\lambda f)$ μ-presque partout, d'où $|\lambda f| = \lambda f$ μ-p.p,

c'est-à-dire $|f| = \lambda f$ μ p.p, ou encore $f = \lambda^{-1}|f|$ μ-p.p, et $|\lambda^{-1}| = 1$. ∎

Proposition : Soient $f, g : X \to \mathbb{C}$ mesurables et coïncidant presque partout. Alors f est intégrable si et seulement si g l'est. Si c'est le cas, $\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu$.

Démonstration : Soient $f, g : X \to \mathbb{C}$ mesurables telles que $f = g$ μ-presque partout. Alors $|f-g| = 0$ μ-presque partout et $f-g$ est mesurable, donc intégrable et $\int_X (f-g)\,d\mu = 0$.

Si f est intégrable alors $g = f - (f-g)$ l'est aussi comme somme de fonctions intégrables, et $\int_X g\,d\mu = \int_X f\,d\mu + 0 = \int_X f\,d\mu$ ∎

<u>Remarque :</u> si la mesure μ est complète et si deux fonctions $X \to \mathbb{C}$ coïncident μ-presque partout alors l'une est mesurable si et seulement si l'autre l'est.

En effet, si $f, g : X \to \mathbb{C}$ coïncident μ-presque partout alors

il existe N mesurable et de mesure nulle ; $f = g$ dans N^c.

Quel que soit B borélien de $\mathbb{C}$, $g^{-1}(B) = (f^{-1}(B) \cap N^c) \cup (g^{-1}(B) \cap N)$.

Si f est mesurable alors $f^{-1}(B)$ est mesurable et donc $f^{-1}(B) \cap N^c$ aussi.

Et $g^{-1}(B) \cap N \subset N$ est mesurable puisque la mesure est complète.

Donc $g^{-1}(B)$ est mesurable.

Ceci montre que g est mesurable. Et vice versa en échangeant les rôles de f et g.

<u>Remarque :</u> que la mesure soit complète ou non, une propriété est vraie μ-presque partout si et seulement si elle est vraie en dehors d'un ensemble négligeable.

En effet, si une propriété $P(x)$ est vraie pour tout $x \in N^c$, où N est mesurable de mesure nulle, elle est vraie en dehors de N qui est négligeable. Inversement, s'il existe un ensemble négligeable N tel que $P(x)$ soit vraie pour tout $x \in N^c$, alors il existe D mesurable de mesure nulle tel que $N \subset D$, et $D^c \subset N^c$. Donc $P(x)$ est vraie pour tout $x \in D^c$. Ceci signifie qu'elle est vraie μ-presque partout.

9 Théorèmes fondamentaux

<u>Théorème de convergence dominée</u> : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : X \to \mathbb{C}$ mesurables convergeant vers f et telle qu'il existe une fonction $g : X \to [0,+\infty[$ intégrable vérifiant $|f_n| \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Alors f est intégrable et $\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$.
De plus, $\int_X |f_n - f|\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration : on rappelle que f est nécessairement mesurable, comme limite (simple) d'une suite de fonctions mesurables. En outre, chaque fonction f_n étant dominée par une fonction intégrable, elle est nécessairement intégrable.
D'après l'hypothèse $|f_n| \leq g$ on a par passage à la limite $|f| \leq g$, donc f est aussi intégrable. De plus, $|f - f_n| \leq 2g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si on pose $h_n := 2g - |f - f_n|$, on sait donc que h_n est mesurable comme somme de fonctions mesurables, et la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $2g$, avec $h_n \geq 0$.
Donc d'après le lemme de Fatou, $\int_X \liminf (h_n)_{n\in\mathbb{N}}\,d\mu \leq \liminf\left(\int_X h_n\,d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Or $\liminf (h_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty}(h_n) = 2g$ et $\int_X h_n\,d\mu = 2\int_X g\,d\mu - \int_X |f - f_n|\,d\mu$.
On a donc

$$\int_X 2g\,d\mu \leq \liminf\left(2\int_X g\,d\mu - \int_X |f-f_n|\,d\mu\right) = 2\int_X g\,d\mu - \limsup\left(\int_X |f-f_n|\,d\mu\right).$$

Ceci prouve que $0 \leq \limsup \int_X |f - f_n|\,d\mu \leq 0$, et donc que $\liminf\left(\int_X |f-f_n|\,d\mu\right) = \limsup\left(\int_X |f-f_n|\,d\mu\right) = 0$, d'où la convergence de $\int_X |f-f_n|\,d\mu$ vers 0.

Par suite, $\left|\int_X (f-f_n)\,d\mu\right| \leq \int_X |f-f_n|\,d\mu$ tend aussi vers 0.
Ce qui montre que $\int_X f_n\,d\mu$ tend vers $\int_X f\,d\mu$ puisque $\int_X (f-f_n)\,d\mu = \int_X f\,d\mu - \int_X f_n\,d\mu$. ∎

Théorème de convergence dominée presque partout : On suppose que la mesure μ est complète.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : X \to \mathbb{C}$ mesurables, convergeant vers une fonction f μ-presque partout et telle qu'il existe une fonction $g : X \to [0,+\infty[$ intégrable pour laquelle on ait, quel que soit $n\in\mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ μ-presque partout.
Alors f est intégrable et $\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$, $\int_X |f_n - f|\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration : on rappelle que f est nécessairement mesurable, comme limite μ-presque partout d'une suite de fonctions mesurables, la mesure μ étant complète. De plus, chaque fonction f_n étant dominée μ-presque partout par une fonction intégrable, elle est nécessairement intégrable.
Les hypothèses impliquent l'existence d'ensembles A et B_n pour $n\in\mathbb{N}$, mesurables de mesure nulle tels que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans A^c et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ dans B_n^c. Si l'on pose $N := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \cup A$, il est mesurable de mesure nulle et l'on a : $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans N^c, $|f_n| \leq g$ dans N^c quel que soit $n\in\mathbb{N}$.
On peut appliquer le théorème précédent à la suite $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\tilde{f}_n := f_n \mathbb{1}_{N^c}$, qui converge vers $\tilde{f} := f\,\mathbb{1}_{N^c}$ et qui est dominée par $\tilde{g} := g\,\mathbb{1}_{N^c}$.
Comme $\int_X \tilde{f}_n\,d\mu = \int_X f_n\,d\mu$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, de même que $\int_X |\tilde{f}_n - \tilde{f}|\,d\mu = \int_X |f_n - f|\,d\mu$, et $\int_X |\tilde{f}|\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu$, on en déduit les résultats voulus. ∎

Corollaire : on suppose la mesure μ complète.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions $f_n : X \to \mathbb{C}$ intégrables, si $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_X |f_n|\, d\mu < +\infty$ alors la série $\sum f_n$ converge absolument μ-presque partout vers une fonction F intégrable et l'on a $\int_X F\, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n\, d\mu$.

Démonstration : Soit $\varphi := \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| : X \to [0, +\infty]$. D'après le théorème d'interversion entre $\sum$ et $\int$ vu pour les fonctions à valeurs positives, on a $\int_X \varphi\, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X |f_n|\, d\mu < +\infty$ par hypothèse. Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} |\int_X f_n\, d\mu| < +\infty$ et φ est intégrable. Ceci implique qu'il existe un ensemble N, mesurable et de mesure nulle tel que $\varphi(x) < +\infty$ pour tout $x \notin N$. Autrement dit, la série $\sum f_n$ converge absolument dans N^c.

Posons $F = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) \mathbb{1}_{N^c}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|F_n := \sum_{k=0}^{n} f_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k| = \varphi.$$

Donc la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par la fonction intégrable φ, et tend vers F sur N^c. On peut aussi dire que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $\varphi \mathbb{1}_{N^c}$ sur N^c. Ceci permet d'appliquer le théorème de convergence dominée presque partout. On en déduit que F est intégrable et $\int_X F\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X F_n\, d\mu$.

Pour conclure, on remarque que $\int_X F_n\, d\mu = \sum_{k=0}^{n} \int_X f_k\, d\mu$ tend vers $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_X f_k\, d\mu$ lorsque n tend vers $+\infty$, puisque la série $\sum \int_X f_n\, d\mu$ converge, et même absolument.

⑩ Mesures images

Proposition : si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré, si $(Y, \mathcal{N})$ est un espace mesurable, si $\phi : X \to Y$ est mesurable alors la fonction

$$\nu : \mathcal{N} \to [0, +\infty]$$
$$A \mapsto \nu(A) := \mu(\phi^{-1}(A))$$ est une mesure.

Démonstration : • $\nu(\emptyset) = \mu(\phi^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ puisque μ est une mesure. • si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ avec les A_n deux à deux disjoints, les $B_n := \phi^{-1}(A_n) \in \mathcal{M}$ sont également deux à deux disjoints et donc $\nu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(\phi^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\phi^{-1}(A_n)}_{B_n})$
$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\phi^{-1}(A_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(A_n)$.

∎

Définition : Sous les hypothèses de la proposition précédente, on dit que ν est la **mesure image** de μ par ϕ. Elle est notée $\phi_* \mu$: pour tout $A \in \mathcal{N}$, $(\phi_* \mu)(A) = \mu(\phi^{-1}(A))$.

Théorème de transfert : Avec cette définition, si $f : Y \to \mathbb{C}$ est mesurable, elle est intégrable par rapport à $\phi_* \mu$ si et seulement si $f \circ \phi : X \to \mathbb{C}$ est intégrable par rapport à μ. Si c'est le cas alors $\int_Y f \, d(\phi_* \mu) = \int_X (f \circ \phi) \, d\mu$.

Démonstration : Noter que $f \circ \phi$ est mesurable comme composée de fonctions mesurables.

- Si $f = \mathbb{1}_A$ avec $A \in \mathcal{N}$ alors $f \circ \phi = \mathbb{1}_{\phi^{-1}(A)}$, et si $\nu(A) = \mu(\phi^{-1}(A)) < +\infty$

alors $\int_Y f \, d(\phi_* \mu) = (\phi_* \mu)(A) = \mu(\phi^{-1}(A)) = \int_X \mathbb{1}_{\phi^{-1}(A)} d\mu = \int_X (f \circ \phi) d\mu$.

- si $f = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{A_j}$ avec $A_j \in \mathcal{N}$ pour tout j, les A_j étant deux à deux disjoints, alors par linéarité de l'intégrale,

$$\int_Y |f| \, d(\phi_* \mu) = \sum_{j=1}^{m} |y_j| \int_X (\mathbb{1}_{A_j} \circ \phi) d\mu = \int_X |f \circ \phi| \, d\mu$$

en appliquant le cas précédent à chaque fonction $\mathbb{1}_{A_j}$,
donc $|f|$ et $|f \circ \phi|$ sont simultanément intégrables, par rapport à $\phi_* \mu$ et μ respectivement. Si c'est le cas alors

$$\int_Y f \, d(\phi_* \mu) = \sum_{j=1}^{m} y_j \int_X (\mathbb{1}_{A_j} \circ \phi) \, d\mu = \int_X f \circ \phi \, d\mu.$$

- si $f : Y \to [0, +\infty]$ est mesurable il existe une suite croissante $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagées mesurables $f_n : Y \to [0, +\infty[$ qui tend vers f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\int_Y f_n \, d(\phi_* \mu) = \int_X f_n \circ \phi \, d\mu$ d'après le cas précédent.
En appliquant le théorème de convergence monotone aux deux membres de l'égalité on en déduit $\int_Y f \, d(\phi_* \mu) = \int_X (f \circ \phi) d\mu$.
Ainsi, f et $f \circ \phi$ sont simultanément intégrables.

- si $f : Y \to \mathbb{C}$ est mesurable alors $\int_Y |f| \, d(\phi_* \mu) = \int_X |f \circ \phi| \, d\mu$, d'après le cas précédent, donc f et $f \circ \phi$ sont simultanément intégrables.
Si c'est le cas, on obtient l'égalité $\int_Y f \, d(\phi_* \mu) = \int_X f \circ \phi \, d\mu$ en décomposant f en $u + iv$ avec u et v réelles puis $u = u_+ - u_-$, $v = v_+ - v_-$, et en appliquant le cas précédent à u_+, u_-, v_+, v_-.

$\boxtimes$

Remarques: 1) la fonction de référence ϕ est automatiquement mesurable si Y est muni de la tribu image par ϕ!

2) le théorème de transfert est à la base du théorème de changement de variables que l'on verra au chapitre sur les intégrales multiples.

3) le théorème de transfert est aussi très utilisé en théorie des probabilités.