Chapitre II : Opérations sur les ensembles

Il ne s'agit pas ici de développer la théorie des ensembles en elle-même, mais plutôt de fixer des notations, donner des exemples, et établir quelques règles bien utiles pour la suite.

① Quelques exemples

L'ensemble vide est noté $\emptyset$. Remarque : tout intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]a,a[$ est l'ensemble vide.

Ensembles de nombres : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ...

Les singletons sont les ensembles à un élément : ils s'écrivent $\{a\}$.

Les paires sont les ensembles à deux éléments : $\{a,b\}$, $a \neq b$.

Il y a diverses manières de définir un ensemble et de le noter.

Par exemple, si E est un ensemble donné, le sous-ensemble F des éléments f de E vérifiant une certaine propriété $P(f)$ se note

$$F = \{ f \in E \,;\, P(f) \} = \{ f \in E \,/\, P(f) \}.$$

Les accolades $\{\cdot\}$ sont la notation standard pour définir des ensembles.

② Appartenance versus inclusion

Le vocabulaire et les notations sont très importantes pour ne pas se perdre !

Un élément x d'un ensemble E lui appartient. On note $x \in E$.

Un sous-ensemble X, ou encore partie de E est inclus dans E.

On note $X \subset E$.

L'ensemble vide ne contient aucun élément. Il est inclus dans n'importe quel ensemble.

L'inclusion est transitive : si $X \subset E$ et $E \subset Z$ alors $X \subset Z$.

Par exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Dans la suite du cours, on va manipuler des familles d'ensembles, ou encore des « ensembles d'ensembles ».

Ainsi, rien n'empêche un ensemble d'appartenir à un ensemble !

Par exemple, si A est un ensemble, on peut considérer le singleton $\{A\}$, auquel A appartient : c'est très différent d'un ensemble dans lequel A serait inclus, comme par exemple $A \cup \{b\}$, où $\{b\}$ est un singleton quelconque.

Pour tout ensemble E on peut considérer l'ensemble ~~des~~ ses parties, généralement noté $\mathcal{P}(E)$, de sorte que, pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, on ait $X \subset E$ et inversement, pour tout $X \subset E$ on a $X \in \mathcal{P}(E)$.

Attention quand même : il y aurait une obstuction logique à considérer l'ensemble de tous les ensembles.

③ Inclusion vs égalité

- L'inclusion d'un ensemble A dans un ensemble B signifie que tout élément de A appartient aussi à B.

  Autrement dit, $A \subset B$ si et seulement si, quel que soit $a \in A$ on a $a \in B$ (avec des symboles : $A \subset B \iff (\forall a \in A, a \in B)$).

- L'égalité entre ensembles signifie qu'on a les deux inclusions :

  $$A = B \text{ si et seulement si } (A \subset B \text{ et } B \subset A),$$

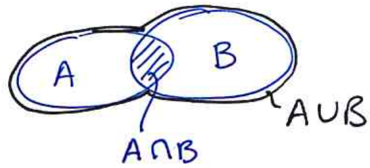
  c'est-à-dire que les éléments de A sont exactement les mêmes que les éléments de B.

⚠ Pour montrer une égalité entre ensembles, il faut vérifier les deux inclusions.

II

④ Réunions et intersections

Les deux opérations de base sur les ensembles sont



- la réunion : $A \cup B = \{x \,;\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- l'intersection : $A \cap B = \{x \,;\, x \in A \text{ et } x \in B\}$

(avec des symboles : $x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)$

$x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)$)

Par définition, on a : $A \cap B \subset A \subset A \cup B$, $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.

Ces opérations sont associatives : étant donnés trois ensembles X, Y, Z, on a $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$, $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$.

Plus généralement, étant donnés un nombre n et des ensembles $X_1, \dots, X_n$, on définit

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = \{x \,;\, \text{pour tout } i \in [\![1, n]\!],\ x \in X_i\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i = \{x \,;\, \text{il existe } i \in [\![1, n]\!],\ x \in X_i\}.$$

<u>Notation</u> : $[\![1, n]\!]$ est l'ensemble des entiers compris (au sens large) entre 1 et n.

Ceci se généralise encore à des familles d'ensembles pas nécessairement finies $(X_i)_{i \in I}$, avec un ensemble d'indices I quelconque.

Par exemple $I = \mathbb{N}$ donne une suite d'ensembles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mais on peut aussi considérer des familles d'ensembles indexées par $\mathbb{R}$, comme par exemple $(\{x\})_{x \in \mathbb{R}}$, qu'il ne faut pas confondre avec $\mathbb{R}$ lui-même !

II

Etant donnés un ensemble (d'indices) I et une famille d'ensembles $(X_i)_{i\in I}$, il existe un unique ensemble dont les éléments appartiennent à au moins l'un des X_i, il est noté $\bigcup_{i\in I} X_i$;

et il existe un unique ensemble dont les éléments appartiennent à tous les X_i, il est noté $\bigcap_{i\in I} X_i$.

(avec des symboles: $x \in \bigcup_{i\in I} X_i \iff (\exists i\in I\ ;\ x\in X_i)$

$$x \in \bigcap_{i\in I} X_i \iff (\forall i\in I,\ x\in X_i)\ )$$

Exemples: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [-\frac{1}{n},\frac{1}{n}] = \{0\}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [-\frac{1}{n},\frac{1}{n}] = [-1,1]$,

$\bigcap_{x\in\mathbb{R}} \{x\} = \emptyset$, $\bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\} = \mathbb{R}$.

Parfois on adopte des notations « simplifiées » à l'aide de l'ensemble dont les éléments sont les X_i :

$E = \{X_i\ ;\ i\in I\}$, $\bigcup_{X\in E} X = \bigcup_{i\in I} X_i$, $\bigcap_{X\in E} X = \bigcap_{i\in I} X_i$.

Propriétés (vérification laissée en exercice).

- Pour une suite d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, croissante au sens de l'inclusion càd que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$, on a pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\geqslant k} A_n$.
- Pour une suite d'ensembles $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, décroissante au sens de l'inclusion càd que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $B_{n+1}\subset B_n$, on a pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\geqslant k} B_n$.
- Pour un ensemble A et une famille d'ensembles $(A_i)_{i\in I}$, on a:

$$A\cap\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I}(A\cap A_i)\ ,\quad A\cup\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I}(A\cup A_i).$$

<u>Définition</u> : On dit qu'une famille d'ensembles $(A_i)_{i\in I}$ forme une partition d'un ensemble X si les A_i sont deux à deux disjoints, càd que quels que soient $i \in I$, $j \in I$ avec $i \neq j$ on a $A_i \cap A_j = \emptyset$, et si $X = \bigcup_{i\in I} A_i$.

<u>Exemple</u>: $([n, n+1[)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une partition de $\mathbb{R}$.

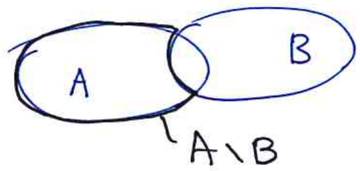
Mais par exemple $([-n, n])_{n\in\mathbb{N}}$ non !

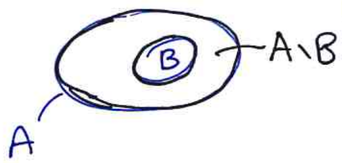
⑤ Différence

Pour deux ensembles A et B, la différence $A\setminus B$ est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B : $A\setminus B = \{a \in A ; a \notin B\}$

(avec des symboles : $x \in A\setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B)$)

On dit aussi que $A\setminus B$ est le complémentaire de B dans A, lorsque $B \subset A$.





Par exemple, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres irrationnels.

<u>Propriétés</u> (vérification laissée en exercice)

Pour un ensemble B et une famille d'ensembles $(A_i)_{i\in I}$,

$$B\setminus\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B\setminus A_i), \quad B\setminus\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B\setminus A_i),$$

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\setminus B = \bigcup_{i\in I}(A_i\setminus B), \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\setminus B = \bigcap_{i\in I}(A_i\setminus B).$$

⑥ Produit cartésien

Etant donnés deux ensembles A et B, leur produit cartésien $A \times B$ désigne l'ensemble des couples (a,b) avec $a \in A$ et $b \in B$:

$$A \times B = \{(a,b) \,;\, a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

⚠ Ne pas confondre les couples (a,b), qui sont des éléments de $A \times B$ avec les paires $\{a,b\}$, qui sont des sous-ensembles de $A \cup B$!

Plus généralement, étant donnés un nombre n et des ensembles $X_1, \dots, X_n$, on définit leur produit cartésien $\prod_{i=1}^{n} X_i$ comme l'ensembles des n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ avec $x_i \in X_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, \dots, x_n) \,;\, \text{pour tout } i \in I,\ x_i \in X_i\}.$$