
Feuille n°5 : Espaces vectoriels

Exercice 1 (*) Parmi les sous-ensembles de \mathbf{R}^2 ou \mathbf{R}^3 ci-dessous, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

1. L'ensemble $D_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x - 3y = 0\}$.
2. L'ensemble $D_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x - 3y = 1\}$.
3. L'ensemble $D_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0\}$.
4. L'ensemble $D_4 = \{(\alpha, 2\alpha) : \alpha \in \mathbf{R}\}$.
5. L'ensemble $D_5 = (\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+) \cup (\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^-)$.
6. L'ensemble $D_6 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 9x^2 + 4y^2 - 12xy = 0\}$.
7. L'ensemble $D_7 = \{(\alpha, \beta, 0) : \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}\}$.
8. L'ensemble $D_8 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : xy + yz + z + x = 0\}$.
9. L'ensemble $D_9 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 0\}$.
10. L'ensemble $D_{10} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \sin(x) + \sin(y) + \sin(z) = 0\}$.

Exercice 2 Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid (a, b) \in \mathbf{R}^2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbf{R}^3 .
2. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 3 Soit $q \in \mathbf{R}$. Montrer que l'ensemble des suites géométriques réelles de raison q est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Même question avec $F = \{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$.

Exercice 4 Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ l'espace des applications de \mathbf{R} vers \mathbf{R} .

1. Rappeler la définition de la structure d'espace vectoriel usuelle sur E .
2. Les sous-ensembles suivants de E en sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
 - (a) L'ensemble des applications linéaires.
 - (b) L'ensemble des applications continues.
 - (c) L'ensemble des applications de classe C^∞ .
 - (d) L'ensemble des applications surjectives.
 - (e) L'ensemble des applications f telles que $f^{-1}(\mathbf{R}^*)$ est fini.

Exercice 5 (*)

1. Donner un exemple d'entier n et de deux sous-espaces vectoriels de \mathbf{R}^n dont la réunion n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n .
2. Soit $n \in \mathbf{N}$, et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de \mathbf{R}^n tels que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n . Montrer que $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 6 Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

1. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$, et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
2. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) = F \cap (G + (F \cap H))$.

Exercice 7 (*) Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. Dans \mathbf{R}^2 : (a) $((3, 2), (4, -1))$; (b) $((3, 2), (4, -1), (5, -2))$.
2. Dans \mathbf{R}^3 : (a) $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$; (b) $((1, 1, 0), (1, 2, 1), (0, 1, 1))$.

Exercice 8 Pour quels $\alpha \in \mathbf{R}$ la famille $((3, 1, -4, 6), (1, 1, 4, 4), (1, 0, -4, \alpha))$ est-elle libre dans \mathbf{R}^4 ?

Exercice 9 Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et e, f, g trois vecteurs de \mathbf{R}^n . On pose $u = e + f$, $v = e + g$ et $w = f + g$.

1. Montrer que la famille (e, f, g) est libre si et seulement si la famille (u, v, w) est libre.
2. Montrer que le sous-espace engendré par (e, f, g) est égal au sous-espace engendré par (u, v, w) .

Exercice 10 (*) Dans \mathbf{R}^3 , on considère les vecteurs $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$ et $w = (1, -2, 3)$.

1. La famille (u, v, w) est-elle libre ?
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (u, v, w) . Donner une base de F .
3. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^3 , puis que $F = G$.

Exercice 11 (*) Montrer que les deux familles de vecteurs $((1, 2, -1, 3), (2, 4, 1, -2), (3, 6, 3, -7))$ et $((1, 2, -4, 11), (2, 4, -5, 14))$ engendrent le même sous-espace vectoriel de \mathbf{C}^4 .

Exercice 12 Dans \mathbf{R}^4 , on considère la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ formée des vecteurs $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$, $v_3 = (3, 1, 4, 2)$, $v_4 = (10, 4, 13, 7)$ et $v_5 = (1, 7, 8, 14)$. Cette famille est-elle libre ? Sinon, en extraire une sous-famille libre engendrant le même sous-espace vectoriel qu'elle.

Exercice 13 Soit $n \in \mathbf{N}$ et soient e_1, \dots, e_k des vecteurs de \mathbf{R}^n . On note Φ l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^k & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_k) & \longmapsto & \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k. \end{array}$$

1. Montrer que (e_1, \dots, e_k) engendrent \mathbf{R}^n si et seulement si Φ est surjective.
2. Montrer que (e_1, \dots, e_k) est libre si et seulement si Φ est injective.

Exercice 14 (*) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit (u, v, w) une famille libre de \mathbf{R}^n . On note

$$F = \{x \in \mathbf{R}^n : \exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x = (\alpha + \beta)u + (\alpha + 2\beta)v + (\alpha + 3\beta)w\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n .
2. Les vecteurs u, v et w appartiennent-ils à F ?
3. Donner une base de F .

Exercice 15 Soit $k \in \mathbf{N}$ et $\{P_0, \dots, P_k\}$ une famille de polynômes tels que $\deg(P_i) = i$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. Montrer que cette famille est libre.

Exercice 16 (*) Soit $n \geq 0$ un entier. On note $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel sur \mathbf{R} des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

1. Quelle est la dimension de $\mathbf{R}_n[X]$?
2. Soit (P_0, \dots, P_n) une famille de polynômes telle que chaque P_k soit de degré k . Montrer que cette famille est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
3. Soit a un réel. Comment s'expriment les coordonnées d'un polynôme P de degré inférieur ou égal à n dans la base $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$?

Exercice 17 Dans l'espace E de l'exercice précédent, montrer que les familles suivantes sont libres

1. (\sin, \cos) ;
2. (f_1, f_2, f_3) , où on a noté $f_k : x \mapsto x^k$;
3. (g_1, g_2, g_3) , où on a noté $g_a : x \mapsto e^{ax}$;
4. (g_a, g_b, g_c) , où a, b et c sont trois réels distincts.