Devoir surveillé n° 1 — Corrigé

Exercice 1

1. Remarquons qu'il s'agit ici d'une forme indéterminée 0/0. Pour la lever, nous allons calculer des développements limités du numérateur et du dénominateur au voisinage de 0. L'ordre 3 ici sera suffisant. Commençons par le numérateur :

$$\begin{aligned}(\cos x)^x - 1 &= e^{x\ln(\cos x)} - 1\\ &= e^{x\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} - 1\\ &= e^{x\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} - 1\\ &= e^{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}\\ &= 1-\frac{x^3}{2}+o(x^3)-1\\ &= -\frac{x^3}{2}+o(x^3).\end{aligned}$$

Quant au dénominateur, on a

$$\sin x - \operatorname{sh} x = x - \frac{x^3}{6} - \left(x+\frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) = -\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

On en déduit que

$$f(x) = \frac{(\cos x)^x - 1}{\sin x - \operatorname{sh} x} = \frac{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)} = \frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{-\frac{1}{3}+o(1)}.$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x) \to \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \quad \text{lorsque} \quad x \to 0}$$

2. Posons $x = 1+h$, de sorte que $x \to 1$ si et seulement si $h \to 0$. Nous allons remplacer x par $1+h$ dans $g(x)$ puis effectuer un développement limité à l'ordre 2 lorsque $h \to 0$. On a ainsi

$$\frac{\ln(1+x+x^2)}{x} = \frac{\ln(1+1+h+1+2h+h^2)}{1+h} = \ln(3+3h+h^2)\times\frac{1}{1+h}.$$

Arrangeons d'abord le logarithme :

$$\ln(3+3h+h^2) = \ln\left(3\left(1+h+\frac{h^2}{3}\right)\right) = \ln 3 + \ln\left(1+h+\frac{h^2}{3}\right).$$

Effectuons le développement limité :

$$\begin{aligned}\ln 3 + \ln\left(1+h+\frac{h^2}{3}\right) &= \ln 3 + \left(h+\frac{h^2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(h+\frac{h^2}{3}\right)^2 + o(h^2)\\ &= \ln 3 + h + \frac{h^2}{3} - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\\ &= \ln 3 + h - \frac{h^2}{6} + o(h^2).\end{aligned}$$

On multiplie maintenant ce développement limité par $\dfrac{1}{1+h} = 1-h+h^2+o(h^2)$:

$$\left(\ln 3 + h - \frac{h^2}{6} + o(h^2)\right)\left(1-h+h^2+o(h^2)\right) = \ln 3 + (1-\ln 3)h + \left(\ln 3 - \frac{7}{6}\right)h^2 + o(h^2).$$

Finalement, on a

$$\boxed{g(x) = \ln 3 + (1-\ln 3)(x-1) + \left(\ln 3 - \frac{7}{6}\right)(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right) \quad \text{lorsque} \quad x \to 1}$$

Exercice 2

(a) Notons déjà que le dénominateur de A ne peut pas se factoriser davantage sur $\mathbf{R}$. Remarquons ensuite que puisque $\deg A = 1$, la partie entière dans la décomposition en éléments simples de A n'est pas nulle. Pour la calculer, on effectue la division euclidienne du numérateur X^4 par le dénominateur $(X-1)(X^2+4) = X^3 - X^2 + 4X - 4$.

$$\begin{array}{r|l}
X^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & X^3 - X^2 + 4X - 4 \\ \cline{2-2}
X^4 - X^3 + 4X^2 - 4X \qquad & X + 1 \\ \cline{1-1}
X^3 - 4X^2 + 4X \quad\; & \\
X^3 - X^2 + 4X - 4 & \\ \cline{1-1}
-3X^2 + 4 &
\end{array}$$

La partie entière cherchée est le quotient dans cette division euclidienne, à savoir $X+1$. D'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe donc $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que

$$A(X) = \frac{X^4}{(X-1)(X^2+4)} = X + 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+4}.$$

Pour trouver a, on multiplie cette égalité par $X-1$ puis on évalue en 1 : cela donne immédiatement $a = \frac{1}{5}$. Par ailleurs, si on multiplie tout par X^2+4 puis évalue en $2i$, on obtient

$$\frac{(2i)^4}{-1+2i} = 2ib + c \quad \text{d'où} \quad c + 2ib = \frac{16(-1-2i)}{5} = \frac{-16-32i}{5}.$$

On en déduit que $b = c = -\frac{16}{5}$. Finalement, la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$ de A est

$$\boxed{A(X) = \frac{X^4}{(X-1)(X^2+4)} = X + 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{X-1} - \frac{16}{5} \cdot \frac{X+1}{X^2+4}}$$

(b) Commençons ici par factoriser le dénominateur de B : on a $X^3 - 2X^2 + X = X(X^2 - 2X + 1) = X(X-1)^2$. Comme $\deg B < 0$, la partie entière de la décomposition en éléments simples de B est nulle. Il existe donc $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que

$$B(X) = \frac{1}{X(X-1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}.$$

On obtient a en multipliant cette égalité par X puis en évaluant en 0, ce qui donne immédiatement $a = 1$. Pour trouver b et c, on peut par exemple commencer par multiplier l'égalité précédente par $(X-1)^2$:

$$\frac{1}{X} = \frac{a}{X}(X - 1^2) + b(X-1) + c.$$

On pose maintenant $X - 1 = h$, c'est-à-dire $X = 1 + h$, de sorte que $\dfrac{1}{1+h} = \dfrac{ah^2}{1+h} + bh + c$. En remarquant que $\dfrac{ah^2}{1+h} = o(h)$ et que $\dfrac{1}{1+h} = 1 - h + o(h)$ lorsque $h \to 0$, cela donne

$$1 - h + o(h) = c + bh + o(h) \quad \text{lorsque} \quad h \to 0.$$

Par unicité des développements limités, on en déduit que $c = 1$ et $b = -1$. Ainsi, la décomposition en éléments simples de B est

$$\boxed{B(X) = \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}}$$

Exercice 3

1. En utilisant la formule du cours pour le développement limité du logarithme, on a déjà

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = -\frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}.$$

Occupons-nous maintenant du dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)} &= 1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^2+o(x^2)\\ &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\\ &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$f(x) = -\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)\right) = -\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right).$$

On trouve finalement

$$\boxed{f(x) = -1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \quad \text{lorsque} \quad x \to 0}$$

2. Le développement limité que l'on vient d'obtenir montre que $f(x) \to -1$ lorsque $x \to 0$. Comme cette limite est finie, on peut prolonger f par continuité en 0, en posant $f(0) = -1$.

3. L'existence d'un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 montre que (le prolongement de) f est dérivable en 0 et que ce développement limité s'identifie à $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$. Comme l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)x$, on en déduit que cette équation s'écrit ici

$$\boxed{y = x - 1}$$

4. D'après le cours, on sait que la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage du point d'abscisse 0 se déduit du premier terme non nul que l'on trouve après la partie affine du développement limité. Ici, il s'agit de $-\frac{x^2}{2}$, qui est de la forme αx^p avec $\alpha < 0$ et p pair. Le cours permet de conclure que le graphe f est situé en dessous de la droite $y = x - 1$ au voisinage du point d'abscisse 0.

Exercice 4

1. Multiplions les deux membres de l'égalité $\dfrac{P(X)}{Q(X)} = \dfrac{\lambda}{X-a} + \dfrac{\mu}{(X-a)^2} + G(X)$ par $(X-a)^2$:

$$(X-a)^2\frac{P(X)}{Q(X)} = \lambda(X-a) + \mu + (X-a)^2G(X).$$

Comme on sait que $Q(X) = (X-a)^2R(X)$, on a

$$\frac{P(X)}{R(X)} = \lambda(X-a) + \mu + (X-a)^2G(X).$$

Remplaçons maintenant X par $a+h$:

$$\frac{P(a+h)}{R(a+h)} = \lambda h + \mu + h^2G(a+h).$$

Comme a n'est pas un pôle de G, la fonction associée à G est bien définie en a. Ainsi, la limite de $G(a+h)$ lorsque $h \to 0$ existe et est finie. Par conséquent, $hG(a+h) \to 0$ et donc $h^2G(a+h) = o(h)$ lorsque $h \to 0$. Cela montre donc que

$$\boxed{\frac{P(a+h)}{R(a+h)} = \mu + \lambda h + o(h) \text{ lorsque } h \to 0}$$

2.(a) Comme les fonctions P et R sont définies et dérivables au voisinage de a (ce sont des fonctions polynomiales), et puisque R ne s'annule pas en a, la fonction $x \mapsto P(x)/R(x)$ est également définie et dérivable au voisinage de a. On peut donc appliquer la formule de Taylor-Young, qui s'écrit

$$\frac{P(a+h)}{R(a+h)} = \frac{P(a)}{R(a)} + \left(\frac{P}{R}\right)'(a)\,h + o(h) \quad \text{lorsque} \quad h \to 0,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{P(a+h)}{R(a+h)} = \frac{P(a)}{R(a)} + \frac{P'(a)R(a) - P(a)R'(a)}{R(a)^2}h + o(h) \quad \text{lorsque} \quad h \to 0}$$

2.(b) En comparant les résultats des questions 1. et 2.(a), et par unicité des développements limités, on obtient immédiatement

$$\boxed{\lambda = \frac{P'(a)R(a) - P(a)R'(a)}{R(a)^2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{P(a)}{R(a)}}$$

3.(a) Écrivons la formule de Taylor pour les polynômes pour $Q(X)$ au point a :

$$Q(X) = Q(a) + Q'(a)(X-a) + \frac{Q''(a)}{2!}(X-a)^2 + \frac{Q'''(a)}{3!}(X-a)^3 + \cdots + \frac{Q^{(m)}(a)}{m!}(X-a)^m.$$

Or, comme a est un pôle de multiplicité 2 de P/Q, on a $Q(a) = Q'(a) = 0$, d'où

$$Q(X) = (X-a)^2 \left(\frac{Q''(a)}{2!} + \frac{Q'''(a)}{3!}(X-a) + \cdots + \frac{Q^{(m)}(a)}{m!}(X-a)^{m-2} \right).$$

Enfin, comme $R(X)$ est défini par $Q(X) = (X-a)^2 R(X)$, il vient

$$\boxed{R(X) = \frac{Q''(a)}{2!} + \frac{Q'''(a)}{3!}(X-a) + \cdots + \frac{Q^{(m)}(a)}{m!}(X-a)^{m-2}}$$

3.(b) L'égalité que l'on vient d'obtenir donne tout de suite $R(a) = \dfrac{Q''(a)}{2!}$ et, par dérivation, $R'(a) = \dfrac{Q'''(a)}{3!}$. On remplace ces expressions dans les formules trouvées à la question 2.(b) et on arrange un peu les fractions trouvées. On trouve alors les expressions demandées :

$$\boxed{\lambda = \frac{6P'(a)Q''(a) - 2P(a)Q'''(a)}{3Q''(a)^2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{2P(a)}{Q''(a)}}$$

4. Posons $P(X) = 1$ et $Q(X) = (X^n - 1)^2$. Les pôles de P/Q sont les racines de l'unité $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ ($0 \leqslant k \leqslant n-1$), ils sont tous doubles. Comme $\deg(P/Q) < 0$, La décomposition en éléments simples de P/Q est donc de la forme

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\lambda_k}{X - \omega_k} + \frac{\mu_k}{(X-\omega_k)^2} \right),$$

avec $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}, \mu_0, \ldots, \mu_{n-1}$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On applique maintenant les formules trouvées précédemment : étant donné que $P(\omega_k) = 1$ et $P'(X) = 0$, on a

$$\lambda_k = -\frac{2Q'''(\omega_k)}{3Q''(\omega_k)^2} \quad \text{et} \quad \mu_k = \frac{2}{Q''(\omega_k)}.$$

Or, comme $Q(X) = X^{2n} - 2X^n + 1$, on a

$$\begin{aligned} Q'(X) &= 2n\left(X^{2n-1} - X^{n-1}\right), \\ Q''(X) &= 2n\left((2n-1)X^{2n-2} - (n-1)X^{n-2}\right), \\ Q'''(X) &= 2n\left((2n-1)(2n-2)X^{2n-3} - (n-1)(n-2)X^{n-3}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, $Q''(\omega_k) = 2n^2\omega_k^{-2}$ et $Q'''(\omega_k) = 6n^2(n-1)\omega_k^{-3}$, d'où finalement (après calculs)

$$\lambda_k = \frac{1-n}{n^2}\omega_k \quad \text{et} \quad \mu_k = \frac{\omega_k^2}{n^2}.$$

Finalement, la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{C}$ de $1/(X^n-1)^2$ est

$$\boxed{\frac{1}{(X^n-1)^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(1-n)\omega_k}{X-\omega_k} + \frac{\omega_k^2}{(X-\omega_k)^2}\right]}$$