Feuille d'exercices no 6 bis
DÉCOMPOSITION SPECTRALE – DÉCOMPOSITION DE DUNFORD

Exercice 4. Soient u_1, u_2 et u_3 les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ ayant pour respectivement pour matrices dans la base canonique :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Données : Pour $k \in \{1,2,3\}$, on a : $A_k = P_k T_k P_k^{-1}$, où

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 8 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$
$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$
$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer, en fonction de u_1, u_2 et u_3, les projecteurs spectraux de ces endomorphismes.
2. Calculer la matrice des projecteurs spectraux dans la base canonique.
3. Pour $k \in \{1,2,3\}$, donner une expression simple de u_k^n en fonction de n et des projecteurs spectraux de u_k, puis sa matrice dans la base canonique.
4. Pour $k \in \{1,2,3\}$ et t réel, donner une expression simple de e^{tu_k} en fonction de n et des projecteurs spectraux de u_k, puis sa matrice dans la base canonique.

Solution. On traite toutes les questions pour A_1, puis toutes pour A_2 et toutes pour A_3.

Étude de A_1

1. On commence par calculer le polynôme caractéristique p_1 de la matrice A_1 ou, ce qui revient au même puisque $A_1 = P_1 T_1 P_1^{-1}$, de T_1. C'est $p_1(X) = (X-2)(X-3)(X-4)$. Comme ce polynôme est scindé à racines simples, la matrice A_1 est diagonalisable et ses espaces caractéristiques sont ses espaces propres.
   Première solution[1]. Comme les racines de m_1 sont simples, la décomposition en éléments simples de $1/m_1(X)$ est de la forme
   $$\frac{1}{m_1(X)} = \frac{a_2}{X-2} + \frac{a_3}{X-3} + \frac{a_4}{X-4},$$
   où $a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Pour calculer a_k, on multiplie par $X-k$ et on évalue en $X = k$. Cela donne :
   $$\frac{1}{(X-3)(X-4)} = a_2 + \frac{a_3(X-2)}{X-3} + \frac{a_4(X-2)}{X-4} \quad \text{donc} \quad a_2 = \frac{1}{2};$$
   $$\frac{1}{(X-2)(X-4)} = a_3 + \frac{a_2(X-3)}{X-2} + \frac{a_4(X-3)}{X-4} \quad \text{donc} \quad a_3 = -1;$$
   $$\frac{1}{(X-2)(X-3)} = a_4 + \frac{a_2(X-4)}{X-2} + \frac{a_3(X-4)}{X-3} \quad \text{donc} \quad a_4 = \frac{1}{2}.$$
   On en déduit donc :
   $$1 = \frac{1}{2}(X-3)(X-4) - (X-2)(X-4) + \frac{1}{2}(X-2)(X-3)$$

1. Pour une comparaison des méthodes utilisées dans les deux solutions de cette question, voir plus bas.

et, en évaluant en u_1 :

$$\mathrm{id} = \underbrace{\frac{1}{2}(u_1 - 3\,\mathrm{id})(u_1 - 4\,\mathrm{id})}_{\pi_2} \underbrace{- (u_1 - 2\,\mathrm{id})(u_1 - 4\,\mathrm{id})}_{\pi_3} + \underbrace{\frac{1}{2}(u_1 - 2\,\mathrm{id})(u_1 - 3\,\mathrm{id})}_{\pi_4}.$$

Deuxième solution. Le projecteur π_2 sur l'espace propre associé à la valeur propre 2 s'obtient en séparant $X-2$ des autres facteurs dans p_1, c'est-à-dire : $p_1(X) = (X-2)(X^2-7X+12)$. On cherche une relation de Bézout entre $X-2$ et $X^2-7X+12$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide, qui se réduit ici à une simple division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} X^2 - 7X + 12 & X-2 \\ \cline{2-2} \underline{-X^2 + 2X \phantom{{}+12}} & X-5 \\ -5X + 12 & \\ \underline{5X - 10} & \\ 2 & \end{array}$$

Ainsi, $X^2-7X+12 = (X-2)(X-5)+2$, et donc, par le théorème de Cayley-Hamilton :

$$\underbrace{\frac{1}{2}(u_1^2 - 7u_1 + 12\,\mathrm{id})}_{\text{un projecteur}} \underbrace{-\frac{1}{2}(u_1 - 2\,\mathrm{id})(u_1 - 5\,\mathrm{id})}_{\text{l'autre projecteur}} = \mathrm{id}\,.$$

D'après le cours, les deux termes sont les projecteurs sur $\ker(u_1 - 2\,\mathrm{id})$ et $\ker(u_1 - 3\,\mathrm{id})(u_1 - 4\,\mathrm{id})$: mais lequel est lequel ? C'est simple : un vecteur dans l'image du premier terme est de la forme $\frac{1}{2}(u_1 - 3\,\mathrm{id})(u_1 - 4\,\mathrm{id})(v)$ donc il est annulé par $u_1 - 2\,\mathrm{id}$ (théorème de Cayley-Hamilton) donc c'est le projecteur sur $\ker(u_1 - 2\,\mathrm{id})$. C'est celui qu'on cherche :

$$\pi_2 = \frac{1}{2}(u_1^2 - 7u_1 + 12\,\mathrm{id}) = \frac{1}{2}(u_1 - 3\,\mathrm{id})(u_1 - 4\,\mathrm{id}).$$

Pour π_3, on écrit $p_1(X) = (X-3)(X^2-6X+8)$, puis $X^2-6X+8 = (X-3)^2-1$, d'où

$$-(u_1^2 - 6u_1 + 8\,\mathrm{id}) + (u_1 - 3\,\mathrm{id})^2 = \mathrm{id},$$

puis

$$\pi_3 = -(u_1^2 - 6u_1 + 8\,\mathrm{id}) = -(u_1 - 2\,\mathrm{id})(u_1 - 4\,\mathrm{id}).$$

Pour π_4, on écrit $p_1(X) = (X-4)(X^2-5X+6)$, puis $X^2-5X+6 = (X-4)(X-1)+2$ et

$$\frac{1}{2}(u_1^2 - 5u_1 + 6\,\mathrm{id}) - (u_1 - 4\,\mathrm{id})(u_1 - \mathrm{id}) = \mathrm{id}$$

puis

$$\pi_4 = \frac{1}{2}(u_1^2 - 5u_1 + 6\,\mathrm{id}) = \frac{1}{2}(u_1 - 2\,\mathrm{id})(u_1 - 3\,\mathrm{id}).$$

2. On n'a plus qu'à calculer les matrices :

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}(A - 3\mathrm{I}_3)(A - 4\mathrm{I}_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$\Pi_3 = -(A - 2\mathrm{I}_3)(A - 4\mathrm{I}_3) = -\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\Pi_4 = \frac{1}{2}(A - 2\mathrm{I}_3)(A - 3\mathrm{I}_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ 4 & 0 & 4 \\ -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Autre solution, en utilisant P_1. Soit $\mathbf{v} = (v_2, v_3, v_4)$ la base dont les vecteurs sont les colonnes de P_1. Comme $A_k = P_1 T_1 P_1^{-1}$, on sait que v_k est un vecteur propre de A_1 pour la valeur propre k ($k \in \{2,3,4\}$). Le projecteur spectral π_k associé à la valeur propre k fixe v_k et annule v_j si $j \neq k$ ($\pi_k(v_j) = \delta_{jk} v_j$ pour tout j). En appliquant la formule de changement de base, les matrices des π_k dans la base canonique sont donc :

$$\Pi_2 = P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_1^{-1}, \quad \Pi_3 = P_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_1^{-1}, \quad \Pi_4 = P_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_1^{-1}.$$

On calcule $P_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -4 & 1 & -4 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ une fois pour toutes et on retrouve, tous calculs faits :

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \Pi_3 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \Pi_4 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ 4 & 0 & 4 \\ -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Comme u_1 est diagonalisable, le cours [2] nous donne l'expression $u_1^n = 2^n\pi_2 + 3^n\pi_3 + 4^n\pi_4$ pour $n \in \mathbb{N}$. On en tire :
$$A_1^n = \begin{pmatrix} 3\cdot 2^{n-1} - 4\cdot 3^n + 14\cdot 4^{n-1} & -2^n + 3^n & 2^{n-1} - 4\cdot 3^n + \frac{7}{2}4^n \\ -4\cdot 3^n + 4^{n+1} & 3^n & -4\cdot 3^n + 4^{n+1} \\ -3\cdot 2^{n-1} + 4\cdot 3^n - 10\cdot 4^{n-1} & 2^n - 3^n & -2^{n-1} + 4\cdot 3^n - 10\cdot 4^n \end{pmatrix}.$$

4. Comme u_1 est diagonalisable, le cours [3] donne l'expression $\mathrm{e}^{tu_1} = \mathrm{e}^{2t}\pi_2 + \mathrm{e}^{3t}\pi_3 + \mathrm{e}^{4t}\pi_4$, ce qui permet donne :
$$\mathrm{e}^{tA_1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2t} - 4\mathrm{e}^{3t} + \frac{7}{2}\mathrm{e}^{4t} & -\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{3t} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} - 4\mathrm{e}3t + \frac{7}{2}\mathrm{e}^{4t} \\ -4\mathrm{e}^{3t} + 4\mathrm{e}^{4t} & \mathrm{e}^{3t} & -4\mathrm{e}^{3t} + 4\mathrm{e}^{4t} \\ -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{2t} + 4\mathrm{e}^{3t} - \frac{5}{2}\mathrm{e}^{4t} & \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{3t} & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} + 4\mathrm{e}3t - \frac{5}{2}\mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix}.$$

Étude de A_2

1. On commence par calculer le polynôme caractéristique p_2 de la matrice A_2 ou, ce qui revient au même puisque $A_2 = P_2T_2P_2^{-1}$, de T_2. C'est $p_2(X) = (X-1)^2(X-4)$.
Première solution. Ici encore, les racines de m_2 sont simples donc $1/m_2(X)$ est de la forme
$$\frac{1}{m_2(X)} = \frac{b_1}{X-1} + \frac{b_4}{X-4},$$
où $b_1, b_4 \in \mathbb{R}$. Pour calculer b_k, on multiplie par $X-k$ et on évalue en $X=k$. Cela donne :
$$\frac{1}{X-4} = b_1 + \frac{b_4(X-1)}{X-4} \quad \text{donc} \quad b_1 = -\frac{1}{3};$$
$$\frac{1}{X-1} = b_4 + \frac{b_1(X-1)}{X-4} \quad \text{donc} \quad b_4 = \frac{1}{3}.$$
Par conséquent,
$$1 = \frac{1}{3}(X-4) - \frac{1}{3}(X-1)$$
et, en évaluant en u_2 :
$$\mathrm{id} = \underbrace{\frac{1}{3}(u_2 - 4\,\mathrm{id})}_{\pi_1}\underbrace{-\frac{1}{3}(u_2 - \mathrm{id})}_{\pi_4}.$$
Cela donne pour matrices des projecteurs spectraux :
$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2-4}{3} & -\frac{1-0}{3} & -\frac{1-0}{3} \\ -\frac{1-0}{3} & -\frac{2-4}{3} & -\frac{1-0}{3} \\ -\frac{1-0}{3} & -\frac{1-0}{3} & -\frac{2-4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \qquad \Pi_4 = \begin{pmatrix} \frac{2-1}{3} & \frac{1-0}{3} & \frac{1-0}{3} \\ \frac{1-0}{3} & \frac{2-1}{3} & \frac{1-0}{3} \\ \frac{1-0}{3} & \frac{1-0}{3} & \frac{2-1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$
Deuxième solution. On a deux projecteurs spectraux, π_1 sur $\ker(u_2 - \mathrm{id}) = \ker(u_2 - \mathrm{id})^2$ et π_4 sur $\ker(u_2 - 4\,\mathrm{id})$. On les obtient grâce à une relation de Bézout entre $(X-1)^2$ et $X-4$.

---

2. *Première démonstration.* Pour $k \in \{2,3,4\}$, on sait que $u_1(v_k) = kv_k$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_1^n(v_k) = k^n v_k$. Pour un vecteur v, décomposé dans la base $\mathbf{v}$ sous la forme $v = \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$ avec $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^3$, on a donc : $u_1^n(v) = \alpha_2 u_1^n(v_2) + \alpha_3 u_1^n(v_3) + \alpha_4 u_4^n(v_4) = 2^n\alpha_2 v_2 + 3^n\alpha_3 v_3 + 4^n\alpha_4 v_4$. Mais, par définition des projecteurs spectraux, $\alpha_k v_k = \pi_k(v)$, d'où $u_1^n(v) = 2^n\pi_2(v) + 3^n\pi_3(v) + 4^n\pi_4(v)$.
Deuxième démonstration. D'après le cours, $u_1 = 2\pi_2 + 3\pi_3 + 4\pi_4$, où les π_k sont des polynômes en u_1 donc commutent deux à deux, et où $\pi_k\pi_\ell = \delta_{k\ell}\pi_k$ pour tous k, ℓ. La relation se prouve par récurrence. On l'a déjà pour $n = 1$; pour l'hérédité, il suffit de développer : $u_1^{n+1} = (2^n\pi_2 + 3^n\pi_3 + 4^n\pi_4)(2\pi_2 + 3\pi_3 + 4\pi_4) = 2^{n+1}\pi_2 + 3^{n+1}\pi_3 + 4^{n+1}\pi_4$, en utilisant les relations satisfaites par les π_k ($\pi_2^2 = \pi_2$, $\pi_2\pi_3 = 0$, etc.).

3. *Première preuve.* Pour $k \in \{2,3,4\}$, on a : $u_1(v_k) = kv_k$ donc $\mathrm{e}^{tu_1}(v_k) = \mathrm{e}^{kt}v_k$. Pour $v = \sum_{k=2}^4 \alpha_k v_k$, on en déduit que $\mathrm{e}^{tu_1}(v) = \sum_{k=2}^4 \mathrm{e}^{kt}\alpha_k v_k$ et donc, comme $\alpha_k v_k = \pi_k(v)$, $\mathrm{e}^{tu_1}(v) = \sum_{k=2}^4 \mathrm{e}^{kt}\pi_k(v)$.
Esquisse de deuxième preuve. Comparer les matrices de u_1, de e^{tu_1} et des π_k dans la base $\mathbf{v}$.

$$\begin{array}{r|l} X^2-2X+1 & X-4 \\ \cline{2-2} -X^2+4X & X+2 \\ \cline{1-1} 2X+1 & \\ -2X+8 & \\ \cline{1-1} 9 & \end{array}$$

Ainsi, $X^2-2X+1=(X-4)(X+2)+9$, et donc :

$$\underbrace{\frac{1}{9}(u_2-\mathrm{id})^2}_{\pi_4}\underbrace{-\frac{1}{9}(u_2-4\,\mathrm{id})(u_2+2\,\mathrm{id})}_{\pi_1}=\mathrm{id}\,.$$

Autrement dit :

$$\pi_1=-\frac{1}{9}(u_2-4\,\mathrm{id})(u_2+2\,\mathrm{id})\quad\text{et}\quad\pi_4=\frac{1}{9}(u_2-\mathrm{id})^2.$$

2. On en déduit les matrices des projecteurs spectraux :

$$\Pi_1=-\frac{1}{9}(A_2-4\,\mathrm{id})(A_2+2\,\mathrm{id})=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\Pi_4=\frac{1}{9}(A_2-\mathrm{id})^2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

3. Comme u_2 est diagonalisable, le cours nous donne l'expression $u_2^n=\pi_1+4^n\pi_4$ pour $n\in\mathbb{N}$. On en tire :

$$A_2^n=\begin{pmatrix}\dfrac{2+4^n}{3}&\dfrac{-1+4^n}{3}&\dfrac{-1+4^n}{3}\\\dfrac{-1+4^n}{3}&\dfrac{2+4^n}{3}&\dfrac{-1+4^n}{3}\\\dfrac{-1+4^n}{3}&\dfrac{-1+4^n}{3}&\dfrac{2+4^n}{3}\end{pmatrix}.$$

4. Comme u_2 est diagonalisable, le cours donne l'expression $\mathrm{e}^{tu_2}=\mathrm{e}^t\pi_1+\mathrm{e}^{4t}\pi_4$, ce qui donne :

$$\mathrm{e}^{tA_2}=\begin{pmatrix}\dfrac{2+\mathrm{e}^{4t}}{3}&\dfrac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{4t}}{3}&\dfrac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{4t}}{3}\\\dfrac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{4t}}{3}&\dfrac{2+\mathrm{e}^{4t}}{3}&\dfrac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{4t}}{3}\\\dfrac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{4t}}{3}&\dfrac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{4t}}{3}&\dfrac{2+\mathrm{e}^{4t}}{3}\end{pmatrix}.$$

Étude de A_3.

1. On commence par calculer le polynôme caractéristique p_3 de la matrice A_3 ou, ce qui revient au même puisque $A_3=P_3T_3P_3^{-1}$, de T_3. C'est $p_3(X)=(X-1)(X-2)^2$.

Première solution. Là, une des racines de m_3 est double donc $1/m_3(X)$ est de la forme

$$\frac{1}{m_3(X)}=\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}=\frac{c_1}{X-1}+\frac{c_2}{X-2}+\frac{d_2}{(X-2)^2},$$

où $c_1,c_2,d_2\in\mathbb{R}$. Pour calculer c_1 et d_2, on multiplie par $X-1$ ou $(X-2)^2$ et on évalue en $X=1$ ou $X=2$. Cela donne :

$$\frac{1}{(X-2)^2}=c_1+\frac{c_2(X-1)}{X-2}+\frac{d_2(X-1)}{(X-2)^2}\quad\text{donc}\quad c_1=1;$$
$$\frac{1}{X-1}=d_2+c_2(X-2)+\frac{c_1(X-2)^2}{X-1}\quad\text{donc}\quad d_2=1.$$

Pour le dernier coefficient, on multiplie (par exemple) par X, on évalue en $x>2$ et on fait tendre x vers l'infini :

$$0=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{m_3(x)}=c_1\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}+c_2\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2}+d_2\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(x-2)^2}$$

donc $c_1+c_2=0$, de sorte que $c_2=-1$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}1 &= c_1(X-2)^2 + c_2(X-1)(X-2) + d_2(X-1)\\ &= (X-2)^2 - (X-1)(X-2) + (X-1)\\ &= (X-2)^2 + (X-1)(-X+2+1)\end{aligned}$$

et, en évaluant en u_3 :

$$\mathrm{id} = \underbrace{(u_3 - 2\,\mathrm{id})^2}_{\pi_1} + \underbrace{(u_3 - \mathrm{id})(-u_3 + 3\,\mathrm{id})}_{\pi_2}.$$

Cela donne pour matrices des projecteurs spectraux :

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= (A_3 - 2\mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix}-3 & 1 & 3\\ -2 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\\ \Pi_2 &= -(A_3 - \mathrm{I}_3)(A_3 - 3\mathrm{I}_3) = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ -2 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 1 & 3\\ -2 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Deuxième solution. On a deux projecteurs spectraux, π_1 sur $\ker(u_3 - \mathrm{id})$ et π_2 sur $\ker(u_3 - 2\,\mathrm{id})^2$. On les obtient avec une relation de Bézout entre $X-1$ et $(X-2)^2$. De $(X-2)^2 = X^2 - 4X + 4 = (X-1)(X-3)+1$, on tire en évaluant en u_3 :

$$\underbrace{-(u_3 - \mathrm{id})(u_3 - 3\,\mathrm{id})}_{\pi_2} + \underbrace{(u_3 - 2\,\mathrm{id})^2}_{\pi_1} = \mathrm{id}\,.$$

D'après le cours et les exemples précédents, on retrouve les projecteurs :

$$\pi_1 = (u_3 - 2\,\mathrm{id})^2 \quad \text{et} \quad \pi_2 = -(u_3 - \mathrm{id})(u - 3\,\mathrm{id}).$$

2. On en déduit les matrices des projecteurs spectraux :

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= (A_3 - 2\mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix}-3 & 1 & 3\\ -2 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\\ \Pi_2 &= -(A_3 - \mathrm{I}_3)(A_3 - 3\mathrm{I}_3) = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ -2 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 1 & 3\\ -2 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. Comme u_3 n'est pas diagonalisable, c'est plus compliqué pour en calculer les puissances. Dans la décomposition de Dunford, $u_3 = d_3 + n_3$ où d_3 est diagonalisable, n_3 est nilpotent et $d_3n_3 = n_3d_3$, on a : $d_3 = \pi_1 + 2\pi_2$. Comme pour les cas précédents, $d_3^k = \pi_1 + 2^k\pi_2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'autre part, $n_3^2 = 0$ car [4] la multiplicité algébrique des valeurs propres est inférieure ou égale à 2.
D'après la formule du binôme de Newton, que l'on peut appliquer puisque d_3 et n_3 commutent, on a, pour $k \in \mathbb{N}$, disons $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}u_3^k = (d_3 + n_3)^k &= \sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}d_3^{k-\ell}n_3^k = \sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}d_3^{k-\ell}n_3^k = d_3^k + kd_3^{k-1}n_3\\ &= d_3^{k-1}(d_3 + kn_3) = (\pi_1 + 2^{k-1}\pi_2)\big(u_3 + (k-1)n_3\big)\end{aligned}$$

(en utilisant le fait que $d_3 + n_3 = u_3$). On calcule la matrice N_3 de n_3 :

$$N_3 = A_3 - \Pi_1 - 2\Pi_2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 2\\ -2 & 1 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

4. Ou bien car la plus grande dimension des espaces caractéristiques vaut 2. Pour le voir, on peut regarder T_3 ; même sans utiliser T_3, il y a deux sous-espaces caractéristiques de dimensions non nulles et la somme de leurs dimension vaut 3.

On en tire :

$$\begin{aligned}
A_3^k &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1+2^{k-1} \\ 2-2^k & 2^{k-1} & -2+2^k \\ 0 & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-2(k-1) & 1+(k-1) & 3+2(k-1) \\ -2 & 2 & 2 \\ -2-2(k-1) & 1+(k-1) & 4+2(k-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1+2^{k-1} \\ 2-2^k & 2^{k-1} & -2+2^k \\ 0 & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2k+1 & k & 2k+1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2k & k & 2k+2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2^k k+1 & 2^{k-1}k & 2^k k+2^k-1 \\ -2^{k+1}+2 & 2^k & 2^{k+1}-2 \\ -2^k k & 2^{k-1}k & 2^k k+2^k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. Comme d_3 et n_3 commutent, on a : $\mathrm{e}^{tu_3} = \mathrm{e}^{td_3}\mathrm{e}^{tn_3}$. Comme $d_3 = \pi_1 + 2\pi_2$ est diagonalisable, on a comme ci-dessus $\mathrm{e}^{td_3} = \mathrm{e}^t\pi_1 + \mathrm{e}^{2t}\pi_2$. De plus, comme $n_3^2 = 0$, on a : $\mathrm{e}^{tn_3} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} t^k n_3^k = \mathrm{id} + tn_3$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA_3} &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 & -\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{2t} \\ 2\mathrm{e}^t-2\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t} & -2\mathrm{e}^t+2\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2t & t & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ -2t & t & 1+2t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t-2t\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} & -\mathrm{e}^t+(2t+1)\mathrm{e}^{2t} \\ 2\mathrm{e}^t-2\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t} & -2\mathrm{e}^t+2\mathrm{e}^{2t} \\ -2t\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} & (2t+1)\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Esquisse de deuxième solution : avec la forme triangulaire. Comme T_3 est diagonale par blocs triangulaires, sa décomposition spectrale saute aux yeux (il faudrait vérifier la commutation de D'_3 et N'_3) :

$$T_3 = D'_3 + N'_3 \quad \text{où} \quad D'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit immédiatement, pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, et $t \in \mathbb{R}$:

$${D'_3}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}; \quad {N'_3}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathrm{e}^{tD'_3} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}; \quad \mathrm{e}^{tN'_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il reste à calculer $T_3^k = (D'_3 + N'_3)^k = {D'_3}^k + k{D'_3}^{k-1}N'_3$, $\mathrm{e}^{tT_3} = \mathrm{e}^{tD'_3}\mathrm{e}^{tN'_3}$, puis l'inverse P_3^{-1} de P_3 donnée par l'énoncé et, enfin, $A_3^k = P_3 T_3^k P_3^{-1}$ et $\mathrm{e}^{tA_3} = P_3 \mathrm{e}^{tA_3} P_3^{-1}$.

Comparaison des méthodes employées pour les projecteurs spectraux
On constate que les expressions des projecteurs spectraux comme polynômes en les u_k ne sont pas les mêmes mais que les matrices, elles, sont les mêmes – ouf ! Il n'est pas surprenant que plusieurs polynômes en u_k définissent le même endomorphisme : par exemple, par le théorème de Cayley-Hamilton, $p_k(u_k)$ est l'endomorphisme nul.

Donnons-nous un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie. Soient $p(X)$ et $m(X)$ ses polynômes caractéristique et minimal. On les supposes scindés, disons

$$p(X) = \prod_{j=1}^r (X-\lambda_j)^{\alpha_j} \quad \text{et} \quad m(X) = \prod_{j=1}^r (X-\lambda_j)^{\beta_j},$$

où les λ_j sont les valeurs propres et où $0 < \alpha_j \leq \beta_j$ pour tout j.
La méthode donnée dans le cours se déroule ainsi :
– décomposer $1/m(X)$ en éléments simples ; on trouve

$$\frac{1}{m(X)} = \sum_{j=1}^r \frac{q_j(X)}{(X-\lambda_j)^{\beta_j}},$$

où les q_j sont des polynômes de degré $\deg q_j < \beta_j$;
– en déduire une égalité de polynômes :

$$1 = \sum_{j=1}^r q_j(X) r_j(X) \quad \text{où, pour tout } j, \quad r_j(X) = \prod_{k\neq j} (X-\lambda_k)^{\beta_k};$$

– alors, le projecteur spectral associé à λ_j est $\pi_j = q_j(u)r_j(u)$.
La méthode employée dans le corrigé précédent est un peu différente :
– pour chaque j, trouver deux polynômes f_j et g_j tels que $f_j(X)(X-\lambda_j)^{\alpha_j} + g_j(X)r_j(X) = 1$ (où $r_j(X) = \prod_{k\neq j}(X-\lambda_k)^{\beta_k}$ comme ci-dessus) ; pour cela, appliquer l'algorithme d'Euclide pour les polynômes ;
– le projecteur spectral associé à λ_k est $g_j(u)r_j(u)$.

Validité de cette méthode

Avec les notations précédentes, montrons que $v_j = g_j(u)r_j(u)$ est le projecteur sur $\ker(u-\lambda_j \,\mathrm{id})^{\alpha_j}$ parallèlement à la somme des noyaux des $\ker(u-\lambda_k \,\mathrm{id})^{\alpha_k}$ (pour $k \neq j$). Cela consiste à refaire une partie de la démonstration du lemme des noyaux.

Tout d'abord, $v_j^2 = v_j$, c'est-à-dire que v_j est un projecteur. En effet,

$$v_j^2 = g_j(u)r_j(u)\big(\mathrm{id} - f_j(u)(u-\lambda_j \,\mathrm{id})^{\alpha_j}\big)g_j(u)r_j(u) - g_j(u)f_j(u)\underbrace{r_j(u)(u-\lambda_j \,\mathrm{id})^{\alpha_j}}_{=p(u)=0} = g_j(u)r_j(u) = v_j.$$

Ensuite, l'image de v_j est contenue dans $\ker(u-\lambda_j \,\mathrm{id})^{\alpha_j}$. En effet, $(u-\lambda_j \,\mathrm{id})^{\alpha_j} v_j = g_j(u)(u-\lambda_j \,\mathrm{id})^{\alpha_j} r_j(u) = g_j(u)p(u) = 0$.

Enfin, si un vecteur x s'écrit comme somme de vecteurs $x_k \in \ker(u-\lambda_k)^{\alpha_k}$ (pour $k \neq j$), alors

$$v_j(x) = \sum_{k\neq j} f_j(u) \prod_{\ell \neq j} (u-\lambda_\ell)^{\alpha_\ell}(x_k).$$

Fixons $k \neq j$. Dans le produit des $(u-\lambda_\ell)^{\alpha_\ell}$ figure $(u-\lambda_k)^{\alpha_k}$ et $(u-\lambda_k)^{\alpha_k}(x_k) = \vec{0}$. Chaque terme est nul et donc $v_j(x) = \vec{0}$.

Par le lemme des noyaux [5] le noyau $\ker(u-\lambda_j)^{\alpha_j}$ et la somme $\bigoplus_{k\neq j} \ker(u-\lambda_k)^{\alpha_k}$ sont supplémentaires. Par conséquent, v_j est bien le projecteur spectral associé à λ_j.

Pourquoi les deux méthodes sont valables

D'après le cours, la méthode du cours donne le projecteur sur $\ker(u-\lambda_j)^{\beta_j}$ parallèlement à $\bigoplus_{k\neq j}\ker(u-\lambda_k)^{\beta_k}$. On vient de voir que l'autre méthode fait de même avec des exposants α_j au lieu de β_j. Cela revient au même puisque le cours démontre que $\ker(u-\lambda_j \,\mathrm{id})^{\alpha_j} = \ker(u-\lambda_j \,\mathrm{id})^{\beta_j}$ pour tout j.

Avantages de la méthode du cours :
– on part du polynôme minimal et pas du polynôme caractéristique : on manipule donc des polynômes de degré plus petit (même si « assez souvent », le polynôme caractéristique et le polynôme minimal sont égaux donc on ne gagne rien ; en tout cas, on ne peut pas perdre) ;
– on calcule directement tous les projecteurs spectraux au lieu de faire des calculs indépendants, valeur propre par valeur propre.

Avantages de l'autre méthode (moindres) :
– il faut commencer par calculer le polynôme minimal, ce qui est inutile pour l'autre méthode ;
– comme le calcul est global, une erreur de calcul aura plus de conséquences.

Compléments de cours

Exercice 5. Soit n un entier naturel non nul, soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Calculer, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, la matrice $\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{I}_n}$.
2. Montrer que si A et B commutent, alors $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B$.
3. En déduire que e^A est inversible et calculer son inverse.
4. Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A. Déduire de 2 une expression de e^A.
5. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si $A = PBP^{-1}$, alors $\mathrm{e}^A = P\mathrm{e}^B P^{-1}$.
6. Montrer que $\det\big(\mathrm{e}^A\big) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)}$.
7. Montrer que si A est nilpotente, alors $\ker\big(\mathrm{e}^A - \mathrm{I}_n\big) = \ker(A)$.
8. Calculer l'exponentielle des matrices suivantes ($n = 2$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \theta \in \mathbb{C}$) :

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\lambda & \theta\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ \theta & \lambda\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\lambda & \theta\\ \theta & \lambda\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\lambda & -\theta\\ \theta & \lambda\end{pmatrix}.$$

5. Invoquer le lemme des noyaux ici évite de faire une récurrence pénible.

Solution. 1. On a : $\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{I}_n} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(\lambda \mathrm{I}_n)^k = \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{I}_n = \mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{I}_n$.

En particulier, pour $\lambda = 0$, on a : $\mathrm{e}^{0_n} = \mathrm{I}_n$. Plus généralement, si A est une matrice diagonale et si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont ses coefficients diagonaux, alors e^A est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\left(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n}\right)$.

2. On se contentera d'un calcul formel en admettant – ce n'est pas évident – que l'on peut justifier la permutation de sommes infinies dans ce cas très précis. Pour cette justification, voir n'importe quel livre de L2 ou de math. spé. ou, en ligne, Wikipedia.

On a d'une part, en admettant que l'on peut distribuer des sommes infinies comme les sommes finies :

$$\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{m!n!}A^m B^n.$$

D'autre part, comme A et B commutent, on peut utiliser la formule de Newton :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{A+B} &= \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{p!}(A+B)^p = \sum_{p\in\mathbb{N}}\sum_{m=0}^{p} \frac{1}{p!}\binom{p}{m}A^m B^{p-m} \\ &= \sum_{p\in\mathbb{N}}\sum_{m=0}^{p} \frac{1}{m!(p-m)!}A^m B^{p-m} = \sum_{(p,m)\in A} \frac{1}{m!}A^m \frac{1}{(p-m)!}B^{p-m},\end{aligned}$$

où A est l'ensemble des couples $(p,m)\in\mathbb{N}^2$ tels que $0\leq m\leq p$. On vérifie que l'application qui envoie un élément (p,m) de A sur le couple $(m,n) = (m, p-m)$ de $\mathbb{N}^2$ est une bijection dont la bijection réciproque envoie $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ sur $(m+n,m)\in A$. En admettant que l'on peut faire un changement de variable pour les sommes infinies comme pour les sommes finies, on en déduit :

$$\mathrm{e}^{A+B} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{m!}A^m \frac{1}{n!}B^n = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B.$$

3. Appliquons la formule précédente à $B = -A$. Comme $A(-A) = -A^2 = (-A)A$, on a : $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^{-A} = \mathrm{e}^{0_n} = \mathrm{I}_n$. Il en résulte que e^A est inversible et que son inverse est e^{-A}.
4. Dans la décomposition de Dunford $A = D+N$, on sait que $DN = ND$. Par suite, on a : $\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^D\mathrm{e}^N$.
5. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on sait depuis quelques semaines que $A^k = PB^kP^{-1}$. On en déduit (en utilisant la continuité de l'application $M\mapsto PMP^{-1}$ pour l'égalité marquée d'un astérisque) que

$$\mathrm{e}^A = \lim_{K\to+\infty}\sum_{k=0}^{K}\frac{1}{k!}A^k = \lim_{K\to+\infty}\sum_{k=0}^{K}\frac{1}{k!}PB^kP^{-1} \overset{*}{=} P\left(\lim_{K\to+\infty}\sum_{k=0}^{K}\frac{1}{k!}B^k\right)P^{-1} = P\mathrm{e}^BP^{-1}.$$

6. Supposons tout d'abord que A soit diagonale et que ses valeurs propres soient $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Alors, par la question 1, son exponentielle e^A est diagonale et son déterminant est

$$\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\lambda_1}\cdots\mathrm{e}^{\lambda_n} = \mathrm{e}^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n} = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A}.$$

Supposons à présent que A soit diagonalisable. Il existe P inversible et B diagonale telles que $A = PBP^{-1}$. D'après la question 5 et le cas précédent, on a :

$$\det \mathrm{e}^A = \det(P\mathrm{e}^BP^{-1}) = \det \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} B} = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A}.$$

Supposons maintenant que A soit nilpotente, autrement dit que A annule le polynôme scindé X^n. Alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure T dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. Pour une telle matrice, toutes les puissances T^k $(k\geq 1)$ sont triangulaires avec de 1 sur la diagonale. L'exponentielle de T, qui est la somme $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}T^k$, est donc triangulaire et ses coefficients diagonaux valent 1. Il en résulte que $\det \mathrm{e}^A = \det \mathrm{e}^T = 1$.

À présent, soit A quelconque. D'après la décomposition de Dunford, il existe D diagonalisable et N nilpotente telles que $ND = DN$ et $A = D+N$. Mais alors, comme $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} D + \operatorname{tr} N = \operatorname{tr} D$ (plus directement, on sait que les valeurs propres de D sont celles de N), on a :

$$\det \mathrm{e}^A = \det \mathrm{e}^{D+N} = \det \mathrm{e}^D\mathrm{e}^N = \det \mathrm{e}^D \det \mathrm{e}^N = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} D}\mathrm{e}^{\operatorname{tr} N} = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A}.$$

Autre méthode : Trigonaliser A, disons $A = PTP^{-1}$, et constater que les coefficients diagonaux des puissances de T sont les puissances des coefficients diagonaux de T et donc que les coefficients diagonaux de e^T sont les exponentielles de ceux de T.

7. Exemples.

(i) On a par la question 1 :

$$\exp\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2}\end{pmatrix}.$$

(ii) Décomposons $\left(\begin{smallmatrix}\lambda & \theta\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}0 & \theta\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$: ces deux matrices commutent, la première est diagonale, la seconde nilpotente – c'est la décomposition de Dunford, quoi ! – donc

$$\exp\begin{pmatrix}\lambda & \theta\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}0 & \theta\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\lambda} & 0\\ 0 & e^{\lambda}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & \theta\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}e^{\lambda} & \theta e^{\lambda}\\ 0 & e^{\lambda}\end{pmatrix},$$

(iii) En répétant les mêmes calculs après transposition, on obtient $\exp\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ \theta & \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\lambda} & 0\\ \theta e^{\lambda} & e^{\lambda}\end{pmatrix}$.

(iv) Soit $I = \mathrm{I}_2 = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $S = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, on a : $\left(\begin{smallmatrix}\lambda & \theta\\ \theta & \lambda\end{smallmatrix}\right) = \lambda I + \theta S$. Comme $IS = SI$ et que $S^2 = I$, on a :

$$\begin{aligned}
e^{\lambda I + \theta S} &= e^{\lambda I} e^{\theta S} = e^{\lambda}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\theta^k}{k!}S^k\\
&= e^{\lambda}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{\theta^{2p}}{(2p)!}\underbrace{S^{2p}}_{=I} + \sum_{q\in\mathbb{N}}\frac{\theta^{2q+1}}{(2q+1)!}\underbrace{S^{2q+1}}_{=S}\right)\\
&= e^{\lambda}\big(\mathrm{ch}(\theta)I + \mathrm{sh}(\theta)S\big)\\
&= \begin{pmatrix}e^{\lambda}\,\mathrm{ch}\,\theta & e^{\lambda}\,\mathrm{sh}\,\theta\\ e^{\lambda}\,\mathrm{sh}\,\theta & e^{\lambda}\,\mathrm{ch}\,\theta\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(v) *Première solution.* Soit $J = \left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, on a : $\left(\begin{smallmatrix}\lambda & -\theta\\ \theta & \lambda\end{smallmatrix}\right) = \lambda I + \theta J$. On a : $IJ = JI$, $J^2 = -I$, d'où $J^3 = -J$, $J^4 = I$. On en déduit[6] que pour $p \in \mathbb{N}$, on a : $J^{2p} = (-1)^p I$ et $J^{2p+1} = (-1)^p J$. Il vient :

$$\begin{aligned}
e^{\lambda I + \theta J} &= e^{\lambda I} e^{\theta J} = e^{\lambda}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\theta^k}{k!}J^k\\
&= e^{\lambda}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{\theta^{2p}}{(2p)!} + \sum_{q\in\mathbb{N}}\frac{\theta^{2q+1}}{(2q+1)!}\right)\\
&= e^{\lambda}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^p\theta^{2p}}{(2p)!}I + \sum_{q\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^q\theta^{2q+1}}{(2q+1)!}J\right)\\
&= e^{\lambda}\big(\cos(\theta)I + \sin(\theta)J\big)\\
&= \begin{pmatrix}e^{\lambda}\cos\theta & -e^{\lambda}\sin\theta\\ e^{\lambda}\sin\theta & e^{\lambda}\cos\theta\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Deuxième solution. La remarque de la note 6 suggère une autre façon de démontrer ce dernier résultat lorsque λ et θ sont réels. Considérons $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel réel. Pour tout complexe z, il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$: cela signifie que $(1, i)$ est une base de cet espace vectoriel (qui est donc de dimension 2). On introduit l'application linéaire

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto (\lambda + i\theta)z.$$

Sa matrice dans la base $(1, i)$ est

$$\begin{pmatrix}\lambda & -\theta\\ \theta & \lambda\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, l'exponentielle de cette matrice est la matrice de e^{φ}, que nous allons déterminer. Soit $w = \lambda + i\theta$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a évidemment $\varphi^k(z) = w^k z$ pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Mais alors,

$$\begin{aligned}
e^{\varphi}(z) &= \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\varphi^k(z) = \sum_{k\geq 0}\frac{w^k}{k!}z\\
&= e^{w}z = e^{\lambda + i\theta}z = e^{\lambda}(\cos\theta + i\sin\theta)z\\
&= e^{\lambda}\cos(\theta)x - e^{\lambda}\sin(\theta)y + i\big(e^{\lambda}\sin(\theta)x + e^{\lambda}\cos(\theta)y\big).
\end{aligned}$$

6. Comparer aux puissances de $i \in \mathbb{C}$: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^{2p} = (-1)^p$, $i^{2p+1} = -i$ $(p \in \mathbb{N})$. D'ailleurs, J est la matrice de l'application $\mathbb{R}$-linéaire $m_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto iz$ dans la base $(1, i)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 qu'est $\mathbb{C}$.

La matrice de l'application linéaire e^{φ} est donc $\begin{pmatrix} e^{\lambda}\cos\theta & -e^{\lambda}\sin\theta \\ e^{\lambda}\sin\theta & e^{\lambda}\cos\theta \end{pmatrix}$.