Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2017-2018

Algèbre III - Licence Mathématiques Générales et Applications L2

Feuille d'exercices no 6 bis

Décomposition spectrale – Décomposition de Dunford

Exercice 1. Déterminer les projecteurs spectraux des matrices suivantes (cf. CC 2) :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rappel : $A = PDP^{-1}$ où $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = QTQ^{-1}$ où $Q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie.

1. Soit s un endomorphisme de E tel que $s^2 = \mathrm{id}$. Exprimer les projecteurs spectraux de s comme des polynômes en s.
2. Soient a et b deux scalaires distincts.
   (a) Soit f un endomorphisme de E tel que $(f - a\,\mathrm{id})(f - b\,\mathrm{id}) = 0$. Exprimer les projecteurs spectraux de f en fonction de f.
   (b) Même question en supposant que $(f - a\,\mathrm{id})^2 = 0$.
3. On suppose E de dimension 2 sur $\mathbb{C}$. Exprimer les projecteurs spectraux de f en fonction de f.
4. Toujours en dimension 2, donner une expression de e^f comme un polynôme en f (distinguer selon qu'il y a une ou deux valeurs propres.

Exercice 3. Déterminer la décomposition de Dunford des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soient u_1, u_2 et u_3 les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ ayant pour respectivement pour matrices dans la base canonique :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Données : Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, on a : $A_k = P_k T_k P_k^{-1}$, où

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 8 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer, en fonction de u_1, u_2 et u_3, les projecteurs spectraux de ces endomorphismes.
2. Calculer la matrice des projecteurs spectraux dans la base canonique.
3. Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, donner une expression simple de u_k^n en fonction de n et des projecteurs spectraux de u_k, puis sa matrice dans la base canonique.
4. Pour $k \in \{1, 2, 3\}$ et t réel, donner une expression simple de e^{tu_k} en fonction de n et des projecteurs spectraux de u_k, puis sa matrice dans la base canonique.

Exercice 5. Soit n un entier naturel non nul, soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Calculer, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, la matrice $\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{I}_n}$.
2. Montrer que si A et B commutent, alors $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B$.
3. En déduire que e^A est inversible et calculer son inverse.
4. Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A. Déduire de **??** une expression de e^A.
5. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si $A = PBP^{-1}$, alors $\mathrm{e}^A = P\mathrm{e}^B P^{-1}$.
6. Montrer que $\det\left(\mathrm{e}^A\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)}$.
7. Montrer que si A est nilpotente, alors $\ker\left(\mathrm{e}^A - \mathrm{I}_n\right) = \ker(A)$.
8. Calculer l'exponentielle des matrices suivantes ($n = 2$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \theta \in \mathbb{C}$) :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & \theta \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \theta & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & \theta \\ \theta & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & -\theta \\ \theta & \lambda \end{pmatrix}.$$