
Feuille d'exercices n° 6
DÉCOMPOSITION SPECTRALE – DÉCOMPOSITION DE DUNFORD

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Démontrer que $\widehat{A} = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable SSI $A = 0$.

2. Démontrer que si A est diagonalisable, alors $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3A & -A \\ 2A & 0 \end{pmatrix}$ l'est aussi.

   Commencer par diagonaliser la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, *cf. CC 2.*

Solution.

1. Si A est la matrice nulle, alors $\widehat{A}$ est la matrice nulle qui est diagonale donc diagonalisable.
   Supposons que $\widehat{A}$ soit diagonalisable. Il existe un polynôme scindé à racines simples $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(\widehat{A}) = 0$. Comme $\widehat{A}$ est triangulaire par blocs, le bloc supérieur gauche de $Q(\widehat{A})$ est $Q(A)$, qui est donc la matrice nulle. Il en résulte, comme Q est scindé à racines simples, que A est diagonalisable. Il existe donc une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $A = PDP^{-1}$. Mais alors, la matrice diagonale par blocs $\widehat{P} = \left(\begin{smallmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{smallmatrix}\right)$ est inversible et son inverse est $\widehat{P}^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{smallmatrix}\right)$. Soit $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_{2n})$ la base de $\mathbb{C}^{2n}$ telle que dont les vecteurs sont les colonnes de $\widehat{P}$ – autrement dit $\widehat{P}$ est la matrice de passage de la base canonique à $\mathbf{v}$. On a alors :
   $$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} PA & PA \\ 0 & PA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PAP^{-1} & PAP^{-1} \\ 0 & PAP^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$
   Cela signifie que $\widehat{A}v_k = \lambda_k v_k$ et que $\widehat{A}v_{n+k} = \lambda_k v_k + \lambda_k v_{n+k}$ si $1 \leq k \leq n$. Dans la base réordonnée $(v_1, v_{n+1}, v_2, v_{n+2}, \ldots, v_n, v_{2n})$, l'application linéaire associée à A a une matrice diagonale par blocs, chaque bloc 2×2 étant $\left(\begin{smallmatrix} \lambda_k & 0 \\ \lambda_k & \lambda_k \end{smallmatrix}\right)$. Les valeurs propres de $\widehat{A}$ sont $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_n$.
   Supposons pour simplifier que tous les λ_k soient distincts. Fixons k. L'espace propre associé à la valeur propre λ_k est de dimension 2 si $\lambda_k = 0$ et de dimension 1 si $\lambda_k \neq 0$ (il suffit d'écrire le système pour le constater).
   Supposons à nouveau que les λ_k sont quelconques, distincts ou non. Fixons $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ et soit r_λ le nombre d'indices k tels que $\lambda_k = \lambda$. Alors l'espace propre associé à la valeur propre λ est de dimension $2r_\lambda$ si $\lambda = 0$ et de dimension 1 si $\lambda \neq 0$.
   Comme $\widehat{A}$ est diagonalisable, la somme des dimensions des $\ker(\widehat{A} - \lambda \mathrm{I_n})$ est $2n$ donc tous les espaces propres sont de dimension $2r_\lambda$. En particulier, tous les λ sont nuls et donc $A = 0$.

2. On a vu dans le CC 2 que la matrice C est diagonalisable. Plus précisément, si $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, alors $P = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ et surtout $C = PDP^{-1}$. On note alors $\widetilde{P} = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{I_n} & \mathrm{I_n} \\ 2\mathrm{I_n} & \mathrm{I_n} \end{smallmatrix}\right)$. On a :
   $$\widetilde{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -\mathrm{I_n} & \mathrm{I_n} \\ 2\mathrm{I_n} & -\mathrm{I_n} \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \begin{pmatrix} -\mathrm{I_n} & \mathrm{I_n} \\ 2\mathrm{I_n} & -\mathrm{I_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I_n} & \mathrm{I_n} \\ 2\mathrm{I_n} & \mathrm{I_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I_n} & 0 \\ 0 & \mathrm{I_n} \end{pmatrix}.$$
   Il vient :
   $$\widetilde{P}^{-1}\widetilde{A}\widetilde{P} = \begin{pmatrix} -\mathrm{I_n} & \mathrm{I_n} \\ 2\mathrm{I_n} & -\mathrm{I_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3A & -A \\ 2A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I_n} & \mathrm{I_n} \\ 2\mathrm{I_n} & \mathrm{I_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & A \\ 4A & -2A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I_n} & \mathrm{I_n} \\ 2\mathrm{I_n} & \mathrm{I_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}.$$
   Supposons qu'il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $\Delta = QAQ^{-1}$ est diagonale. Posons alors $\widetilde{Q} = \left(\begin{smallmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{smallmatrix}\right)$. Alors
   $$\widetilde{Q}\widetilde{P}^{-1}\widetilde{A}\widetilde{P}\widetilde{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QAQ^{-1} & 0 \\ 0 & 2\,QAQ^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 2\,\Delta \end{pmatrix},$$
   qui est bien une matrice diagonale.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^2$, soient D_1 et D_2 les droites d'équations respectives $y = x$ et $y = -2x$.

1. Déterminer la matrice dans la base canonique des projecteurs sur D_1 parallèlement à D_2 et sur D_2 parallèlement à D_1.
2. Déterminer un endomorphisme linéaire f de $\mathbb{R}^2$ tel que $D_k = \operatorname{Ker}(f - k\,\mathrm{id})$ si $k \in \{1, 2\}$ (on donnera sa matrice dans la base canonique). Combien y a-t-il de tels f ?

Solution.

1. On reconnaît deux droites dans le plan, ça ne va pas être l'occasion de se fouler la tête. Soit

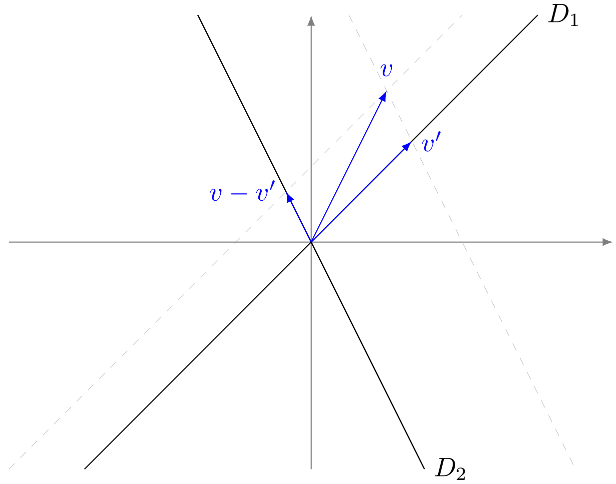

Figure 1 – Projection sur une droite parallèlement à une autre

$v = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $v' = (x_1', x_2') \in D_1$ tel que $v - v' \in D_2$ (en effet, on pourra alors écrire $v = v' + (v - v')$, somme d'un vecteur de D_1 et d'un vecteur de D_2). La condition $v' \in D_1$ s'écrit $x_2' = x_1'$. Comme $v - v' = (x_1 - x_1', x_2 - x_2')$, la condition $v - v' \in D_2$ s'écrit : $x_2 - x_2' = -2(x_1 - x_1')$. On doit donc résoudre le système suivant, d'inconnues (x_1', x_2') :

$$\begin{cases} x_2' = x_1' \\ x_2 - x_2' = -2(x_1 - x_1') \end{cases} \iff \begin{cases} x_2' = x_1' \\ 3x_1' = 2x_1 + x_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3}x_1 + \dfrac{1}{3}x_2 \\ \dfrac{2}{3}x_1 + \dfrac{1}{3}x_2 \end{pmatrix}.$$

La projection p sur D_1 parallèlement à D_2 a donc pour matrice dans la base canonique

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Bien sûr[1], la projection sur D_2 parallèlement à D_1 est $q = \mathrm{id} - p$, dont la matrice est

$$\mathrm{I}_2 - \Pi = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 - \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

2. L'énoncé donne la restriction de f à D_1 et à D_2 donc il existe une et une seule réponse. En effet, soient $v_1 = (1, 1) \in D_1$ et $v_2 = (1, -2) \in D_2$: la famille (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. L'application f est caractérisée par $f(v_1) = v_1$ et $f(v_2) = v_2$. Sa matrice dans la base (v_1, v_2) est donc $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Soit $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ la matrice de passage de la base canonique à (v_1, v_2). Alors la matrice de f dans la base canonique est

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

NB : On peut vérifier que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, comme souhaité.

1. Pourquoi est-ce évident ? Parce que quand on écrit $v = v' + (v - v')$ avec $v' \in D_1$ et $v - v' \in D_2$, eh bien, $q(v) = v - v'$.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, soit D la droite engendrée par le vecteur $v_1 = (1, 1, 1)$ et soit P le sous-espace vectoriel $\Pi = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\big\}$.

1. Déterminer la matrice dans la base canonique des projecteurs p et q sur D parallèlement à P et sur P parallèlement à D.
2. Déterminer un endomorphisme linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dont les espaces caractéristiques sont D et P et dont le polynôme minimal est $(X - 2)(X - 4)^2$ (on donnera sa matrice dans la base canonique). Combien y a-t-il de tels f ?

Solution.

1. Soit $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. On cherche $v' = \lambda v_1 \in D$ tel que $v - v' \in \Pi$. Comme $v - v' = (x_1 - \lambda, x_2 - \lambda, x_3 - \lambda)$, cette condition s'écrit : $x_1 + x_2 + x_3 - 3\lambda = 0$, ce qui donne pour v' et pour la matrice de p :
$$v' = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_2}{3} \\ \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_2}{3} \\ \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_2}{3} \end{pmatrix}.$$
Comme on a trouvé une solution unique pour tout v, D et Π sont supplémentaires. De plus :
$$\mathrm{Mat}(p) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}(q) = \mathrm{Mat}(\mathrm{id} - p) = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

2. Supposons qu'un tel endomorphisme existe. Le polynôme caractéristique de f est de degré 3, son coefficient dominant est $(-1)^3$ et il divise $(X-2)(X-4)^2$ donc c'est $-(X-2)(X-4)^2$. Les espaces caractéristiques de f sont donc $\ker(f - 2\,\mathrm{id})$ et $\ker(f - 4\,\mathrm{id})^2$. Comme la multiplicité géométrique d'une valeur propre est inférieure à la multiplicité algébrique, on a : $\dim \ker(f - 2\,\mathrm{id}) \leq 1$ donc $\ker(f - 2\,\mathrm{id}) = D$ (ça ne peut pas être Π qui est de dimension 2) et $\ker(f - 4\,\mathrm{id})^2 = \Pi$.
Sur Π, l'application $f - 4\,\mathrm{id}$ est nilpotente donc elle admet une base dans laquelle elle est triangulaire. Mais elle n'est pas diagonale, sinon elle serait nulle, on aurait $f - 4\,\mathrm{id} = 0$ sur Π et $(X - 2)(X - 4)$ annulerait f.
On obtiendra une solution pour n'importe quel choix d'une base de Π et d'une matrice triangulaire non diagonale avec des 4 sur la diagonale. Soit $v_2 = (1, -1, 0)$ et $v_3 = (0, 1, -1)$: (v_2, v_3) est une base de Π. On peut supposer que la restriction de f à Π ait pour matrice $\left(\begin{smallmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ ou $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 17 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ ou $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$. Pour ce dernier choix, qui sera le choix final, on a donc : $f(v_2) = 4v_2 + v_3$ et $f(v_3) = 4v_3$. Sur D, c'est facile : on a une base, (v_1), et on sait que $f(v_1) = 2v_1$ car [2] $D = \ker(f - 2\,\mathrm{id})$. Bref,
$$\begin{cases} f(v_1) = 2v_1 \\ f(v_2) = 4v_2 + v_3 \\ f(v_3) = 4v_3 \end{cases} \qquad \text{donc} \quad T = \mathrm{Mat}_{(v_1, v_2, v_3)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$
Pour calculer la matrice de f dans la base canonique, il suffit d'écrire la matrice de passage P d'icelle vers (v_1, v_2, v_3), de calculer P^{-1} puis $A = PTP^{-1}$. Cela donne, tous calculs faits :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 3 & -1 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}.$$

2. Si ça ne vous saute pas aux yeux, vous allez avoir des soucis aux prochains examens.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$.

1. Soit f un endomorphisme diagonalisable de E et soit F un sous-espace de E stable par f. Démontrer que la restriction de f à F est diagonalisable.
2. Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent (tels que $fg = gf$). Démontrer qu'il existe une base dans laquelle les matrices de f et g sont diagonales.

Solution.

1. La restriction de f à F est $h : F \to F$, $v \mapsto f(v)$. Comme f est diagonalisable, il existe un polynôme Q scindé à racines simples qui annule f, c'est-à-dire que $Q(f) = 0$. Cette égalité est toujours satisfaite par h. Comme h annule Q, qui est scindé à racines simples, h est diagonalisable.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension n et soient f et g deux endomorphismes diagonalisables qui commutent. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de g. Puisque g est diagonalisable, E est la somme directe des $\ker(g - \lambda_k \,\mathrm{id})$ $(1 \le k \le r)$.

   Fixons $k \in \{1, \dots, r\}$. Le sous-espace $F_k = \ker(g - \lambda_k \,\mathrm{id})$ est stable par f. En effet, si $v \in F_k$, alors $f(v) \in F_k$ puisque
$$g\big(f(v)\big) = g \circ f(v) = f \circ g(v) = f\big(g(v)\big) = f(\lambda_k v) = \lambda_k\, f(v).$$
   D'après la question précédente, la restriction de f à F_k est diagonalisable. Il existe donc une base $\mathbf{v}^{(k)} = (v_1^{(k)}, \dots, v_{d_k}^{(k)})$ de F_k formée de vecteurs propres de f (on note $d_k = \dim \ker(g - \lambda_k \,\mathrm{id})$). Ces vecteurs sont aussi propres pour g (pour la valeur propre λ_k).

   En recollant les bases $\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(r)}$, on obtient une base de E qui est formée de vecteurs propres de f *et* g.
3. (Addendum.) On généralise la propriété précédente à une famille quelconque $(f_i)_{i\in I}$, finie ou infinie, diagonalisables et qui commutent deux à deux ($f_i f_j = f_j f_i$ pour tous $i, j \in I$).

   On procède par récurrence sur la dimension de E (si !). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n l'assertion : « pour tout espace de dimension n sur $\mathbb{K}$, pour toute famille d'endomorphismes $(f_i)_{i\in I}$ diagonalisables qui commutent, il existe une base de E formée de vecteurs propres de chaque f_i $(i \in I)$. »

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que l'assertion H_j soit vraie pour tout $j \le n - 1$. Soit E un espace de dimension n et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E diagonalisables qui commutent deux à deux.

   Si tous les f_i sont des homothéties, c'est-à-dire si pour tout i, il existe $\mu_i \in \mathbb{K}$ tel que $f_i = \mu_i \,\mathrm{id}$, il n'y a rien à démontrer : tout vecteur non nul de E est propre pour tous les f_i donc toute base de E est formée de vecteurs propres de tous les f_i. (NB : c'est en particulier le cas si $n = 1$.)

   Sinon, il existe $i_0 \in I$ tel que $g = f_{i_0}$ admet au moins deux valeurs propres distinctes. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de g. Puisque g est diagonalisable, E est la somme directe des $\ker(g - \lambda_k \,\mathrm{id})$ $(1 \le k \le r)$ et chaque F_k est de dimension $d_k < n$.

   Fixons $k \in \{1, \dots, r\}$. Le sous-espace $F_k = \ker(g - \lambda_k \,\mathrm{id})$ est stable par f. En effet, si $v \in F_k$, alors $f(v) \in F_k$ puisque
$$g\big(f(v)\big) = g \circ f(v) = f \circ g(v) = f\big(g(v)\big) = f(\lambda_k v) = \lambda_k\, f(v).$$
   D'après la première question, la restriction de chaque f_i à F_k est diagonalisable. Comme $d_k < n$, on peut appliquer H_{d_k} à F_k et à la famille $(f_i|_{F_k})_{i\in I}$: il existe une base de F_k formée de vecteurs propres de f_i $(i \in I)$. En recollant ces différentes bases, on construit une base de E formée de vecteurs propres de f_i $(i \in I)$.

   On peut alors conclure par récurrence.

   NB : Surpris qu'il n'y ait pas d'initialisation ? En fait, on a fait quelque chose d'équivalent en démontrant H_1 au passage – bien obligé, puisque l'hypothèse « H_j pour $j < 1$ » n'apporte rien.