
Feuille d'exercices n° 6
Décomposition spectrale – Décomposition de Dunford

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Démontrer que $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable SSI $A = 0$.
2. Démontrer que si A est diagonalisable, alors $\begin{pmatrix} 3A & -A \\ 2A & 0 \end{pmatrix}$ l'est aussi.

   Commencer par diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -A \\ 2A & 0 \end{pmatrix}$*, cf. CC 2.*

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^2$, soient D_1 et D_2 les droites d'équations respectives $y = x$ et $y = -2x$.

1. Déterminer la matrice dans la base canonique des projecteurs sur D_1 parallèlement à D_2 et sur D_2 parallèlement à D_1.
2. Déterminer un endomorphisme linéaire f de $\mathbb{R}^2$ tel que $D_k = \operatorname{Ker}(f - k\,\mathrm{id})$ si $k \in \{1, 2\}$ (on donnera sa matrice dans la base canonique). Combien y a-t-il de tels f ?

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, soit D la droite engendrée par le vecteur $v_1 = (1, 1, 1)$ et soit P le sous-espace vectoriel $P = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

1. Déterminer la matrice dans la base canonique des projecteurs sur D parallèlement à P et sur P parallèlement à D.
2. Déterminer un endomorphisme linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dont les espaces caractéristiques sont D et P et dont le polynôme minimal est $(X - 2)(X - 4)^2$ (on donnera sa matrice dans la base canonique). Combien y a-t-il de tels f ?

Exercice 4. Déterminer les projecteurs spectraux des matrices suivantes (cf. CC 2) :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie.

1. Soit s un endomorphisme de E tel que $s^2 = \mathrm{id}$. Exprimer les projecteurs spectraux de s comme des polynômes en s.
2. Soient a et b deux scalaires distincts.
   (a) Soit f un endomorphisme de E tel que $(f - a\,\mathrm{id})(f - b\,\mathrm{id}) = 0$. Exprimer les projecteurs spectraux de s en fonction de s.
   (b) Même question en supposant que $(f - a\,\mathrm{id})^2 = 0$.
3. On suppose E de dimension 2 sur $\mathbb{C}$. Exprimer les projecteurs spectraux de f en fonction de f.

Exercice 6. Déterminer la décomposition de Dunford des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$.

1. Soit f un endomorphisme diagonalisable de E et soit F un sous-espace de E stable par f. Démontrer que la restriction de f à F est diagonalisable.
2. Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent (tels que $fg = gf$). Démontrer qu'il existe une base dans laquelle les matrices de f et g sont diagonales.

Exercice 8. On reprend les deux matrices de l'exercice 4.

1. On suppose qu'il existe une matrice X (resp. Y) telle que $X^2 = A$ (resp. $Y^2 = B$). Montrer que $XA = AX$ (resp. $YB = BY$).
2. Montrer qu'il existe une telle matrice X. Est-elle unique ? Existe-t-il une matrice Y ?