Feuille d'exercices n° 4

Trigonalisation et applications

Exercice 1. ⧫ Montrer qu'une matrice triangulaire inférieure est trigonalisable.

Exercice 2. ⧫ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique de A.

Trigonaliser A.

Exercice 3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique de A.

Trigonaliser A.

Exercice 4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique de A.

Trigonaliser A.

Exercice 5. ⧫ Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = \quad\; y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z. \end{cases}$$

Exercice 6. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z. \end{cases}$$

Exercice 7. ⧫ Résoudre le système différentiel linéaire d'ordre 1 d'équation matricielle

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$.

Exercice 8. ♦ On considère les suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_n + \frac{3}{2}u_{n+1}.$$

1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner une matrice A telle que l'équation matricielle $AX_n = X_{n+1}$ soit satisfaite pour tout n.
2. Diagonaliser A.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

Exercice 9. ♦ Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$ et soit E_a l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ qui satisfont à la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n.$$

1. Montrer que E_a est un sous-espace vectoriel de l'espace de suites $(u_n)_{n\geq 0}$ à valeurs réelles.
2. Montrer que A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si $a \neq 1$.
3. On suppose $a \neq 1$.
   (a) Trouver une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale.
   (b) Calculer A^n.
   (c) En déduire une expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.
   (d) Donner une base de E_a.
4. On considère maintenant le cas $a = 1$.
   (a) Trouver une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure.
   (b) Calculer T^2, T^3 puis proposer une expression pour T^n qu'on prouvera par récurrence.
   (c) En déduire une expression de u_n pour tout n.
   (d) Donner une base de E_1.

Exercice 10. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2}.$$

1. Écrire la relation de récurrence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ sous la forme d'une équation matricielle

$$X_{n+1} = AX_n.$$

2. La matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
3. Calculer u_n pour tout n.