Feuille d'exercices n° 3

Valeurs propres, vecteurs propres et diagonalisation

1 Valeurs propres et vecteurs propres

Exercice 1. ♦ Soit $\mathbb{K}$ un corps, par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\varphi_A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ l'application linéaire dont la matrice est A dans la base canonique.

1. Montrer que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de φ_A si et seulement si $\det(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}_n) = 0$.
2. Soient φ_A et $\varphi_B \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ les applications linéaires associées aux matrices
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de φ_A et φ_B.

Exercice 2. On va considérer deux espaces vectoriels de dimension infinie dans cet exercice. La définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre est la même que pour des espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soit V l'espace vectoriel réel des fonctions indéfiniment différentiables et 2π-périodiques, soit $L \in \mathrm{End}(V)$ l'application linéaire définie par $L(f) = f''$ pour $f \in V$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fonctions c_k et s_k définies par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad c_k(x) = \cos(kx) \quad \text{et} \quad s_k(x) = \sin(kx)$$
sont des vecteurs propres de L. Calculer les valeurs propres associées.
2. Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles, considérons l'application linéaire
$$S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad S(a_0, a_1, a_2, \cdots) = (a_1, a_2, a_3, \cdots).$$
Trouver toutes les valeurs propres de S et, pour chaque valeur propre λ, une base de V_λ.

Exercice 3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) par la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de u. En déduire que 0 est valeur propre de u.
2. Montrer que $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est vecteur propre de u.
3. Construire une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de u.

Exercice 4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ?
2. Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale ? Si oui, donner une telle base.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2 Polynôme caractéristique

Exercice 5. ⧫

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifier la formule suivante pour le polynôme caractéristique :

$$p_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A).$$

2. Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer la formule :

$$p_A(X) = -X^3 + \mathrm{tr}(A)X^2 - \mathrm{Z}(A)X + \det(A) \quad \text{où} \quad \mathrm{Z}(A) = \frac{1}{2}\Big(\big(\mathrm{tr}(A)\big)^2 - \mathrm{tr}(A^2)\Big).$$

   en supposant la matrice A triangulaire supérieure. (NB : La formule reste vraie sans cette hypothèse, on pourra la montrer dans quelques semaines.)

Exercice 6. ⧫ Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que

$$A^2 - \mathrm{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.

1. Donner un exemple d'une application linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ n'ayant aucune valeur propre réelle. Cela est-il possible pour une application linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$?
2. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie et soit $\varphi \in \mathscr{L}(V)$ n'ayant aucune valeur propre réelle. Que peut-on dire de la dimension de V ? Montrer que si $\varphi \in \mathscr{L}(V)$ n'a aucune valeur propre réelle et U est un sous-espace de V stable par φ, alors la dimension de U est paire.

Exercice 8. ⧫ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de A, alors le nombre complexe conjugué $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A avec la même multiplicité.
2. Montrer que si $v \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé à λ, alors son conjugué $\overline{v}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$.

Exercice 9. ⧫ Soient a, b et c trois nombres complexes. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la somme des valeurs propres de A ?
2. Quel est le produit des valeurs propres de A ?
3. Montrer que si son déterminant n'est pas nul, A est diagonalisable.
4. Montrer que si son déterminant est nul, A n'est diagonalisable que si elle est nulle.
5. Montrer que A est diagonalisable sauf si son rang est égal à 1.
6. On suppose que la matrice A est réelle ; à quelle condition est-elle diagonalisable par un changement de base réel ?

Exercice 10. Soit n un entier naturel et soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On pose $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $n \times n$ suivante :
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$
2. En déduire les valeurs propres de C, ainsi que les vecteurs propres associés.

3 Diagonalisation

Exercice 11. Soit φ et ψ les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont respectivement les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$
Déterminer si chacun de ces endomorphismes est diagonalisable. Si oui, trouver une base formée de vecteurs propres et la matrice correspondante dans cette base en donnant la matrice de passage.

Exercice 12. ⧫ Diagonaliser ou trigonaliser dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, en donnant la matrice de passage, les matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. ⧫ Discuter en fonction de a, b et c la possibilité de diagonaliser les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. 1. Montrer que la matrice suivante n'est pas diagonalisable :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Écrire une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice suivante soit diagonalisable :

$$\begin{pmatrix} \alpha & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \alpha & c_{23} & & c_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Exercice 15. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{C}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme u.
2. Montrer sans nouveaux calculs qu'il existe une base de $\mathbb{C}^3$ forme de vecteurs propres.
3. Déterminer la matrice de passage de la base canonique à une base formée de vecteurs propres.
4. L'endomorphisme u est-il diagonalisable sur les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$?

Exercice 16. ⧫ Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En diagonalisant A, trouver une solution Z dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ à l'équation $Z^2 = A$.

Exercice 17. Soit $V = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2 et soit u l'endomorphisme de V défini par

$$u\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que l'endomorphisme u est diagonalisable et construire une base de vecteurs propres de u.
2. Quel est le polynôme caractéristique de u ?

Exercice 18. ⧫ On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$u(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP'.$$

1. Écrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que u est diagonalisable.
3. Résoudre l'équation $u(P) = P$.

Exercice 19. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E de rang égal à 1.

1. Montrer que la trace de u est une valeur propre de u.
2. En déduire que u est diagonalisable si et seulement si sa trace n'est pas nulle.