---

**Feuille d'exercices n° 2**

DÉTERMINANTS ET PERMUTATIONS

---

**Exercice 1.** ⧫ Soient $\pi_1$, $\pi_2$ et $\pi_3$ trois permutations de $S_8$ données dans la notation en deux lignes par les expressions suivantes :

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 8 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 1 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 2 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\pi_1 \circ \pi_2$, $\pi_2 \circ \pi_1$ et $\pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$.
2. Déterminer le support de ces permutations.
3. Calculer leurs inverses.
4. Trouver leurs décompositions en produit de cycles à supports disjoints.
5. Représenter les permutations comme produit de transpositions.
6. Calculer leurs signatures.

**Exercice 2.**
1. Écrire une liste des permutations de $\mathcal{S}_4$ et leurs signatures.
2. Donner un exemple d'une permutation $\sigma$ dans $S_{12}$ sans point fixe et avec pour signature $\varepsilon(\sigma) = -1$.
3. Soit $\pi$ une permutation telle que $\pi^3 = \mathrm{id}$. Quelle est sa signature ?

**Exercice 3.** ⧫ Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.** Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & -1 \\ -14 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 2 & -2 \\ 28 & -2 & -2 & 35 \end{pmatrix}$.
Calculer $AB$ puis $\det B$.

**Exercice 5.** Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, et $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$.
Calculer ${}^tMM$. En déduire la valeur du déterminant de $M$.

**Exercice 6.** Soient $k$ et $a$ deux réels. Calculer les déterminants des matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 1 & k^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & k+1 & k+2 \\ 1 & k+2 & 2k+4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \cos a & 1 & -\sin a \\ 0 & 2 & 0 \\ \sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}.$$

**Exercice 7.** ⧫ On désigne par $I_n$ la matrice identité de taille $n$. Déterminer les nombres complexes $\lambda$ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, dans les deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 8.** ⧫ Montrer que les matrices suivantes ont un déterminant nul :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 9.** À l'aide du pivot de Gauss, calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

**Exercice 10.** ⧫ Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & c & c & c \\ a & d & d & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & \cdots & n & n \end{pmatrix}.$$

**Exercice 11.** Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 12.** ♦ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A_n = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ a & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $D_n = \det A_n$.

1. Calculer $D_2$ et $D_3$.
2. Calculer $D_n$ en fonction de $n$ (on pourra procder de façon directe ou par récurrence).
3. Calculer le rang de la matrice $A_n$ en fonction de $a$.

**Exercice 13.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, *i.e* ${}^tA = -A$.
Montrer que si $A$ est inversible, alors $n$ est nécessairement pair.

**Exercice 14.** On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0$, $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
Montrer que $\det(A) = \det(B) = 0$.

**Exercice 15.** On note $GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid M \text{ inversible et } M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})\}$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det M = \pm 1$.