Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2017-2018

Algèbre III - Licence de mathématiques générales et applications L2

Contrôle Continu n° 3

Mardi 12 décembre 2017 – Durée 45 minutes

Exercice 1. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, vérifiant

$$f^3 - f^2 - 2f + 2\,\mathrm{id} = 0$$

1. Quelles sont les valeurs propres possibles de f ?
2. Montrer que f est diagonalisable.
3. Montrer que f est inversible.
4. Exprimer l'inverse f^{-1} comme un polynôme en f.

Solution.

1. Si λ est une valeur propre de f, alors [1] $\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. Factorisons $X^3 - X^2 - 2X + 2$. D'abord, on voit que 1 est une racine et que le polynôme se coupe en deux :

$$X^3 - X^2 - 2X + 2 = X^2(X-1) - 2(X-1) = (X^2-2)(X-1).$$

Si l'on préfère, on peut aussi poser la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} X^3 - X^2 - 2X + 2 & X - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-X^3 + X^2 \phantom{{}-2X+2}} & X^2 - 2 \\ -2X + 2 & \\ \underline{2X - 2} & \\ 0 & \end{array}$$

La factorisation se termine sans difficulté :

$$X^3 - X^2 - 2X + 2 = (X-1)\big(X-\sqrt{2}\big)\big(X+\sqrt{2}\big).$$

Ainsi, les valeurs propres de f appartiennent à $\big\{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\big\}$.

2. Comme f annule un polynôme scindé à racines simples, f est diagonalisable.
3. *Première solution, en supposant que l'espace vectoriel ambiant est de dimension finie.* Comme 0 n'est pas une valeur propre de f, le noyau [2] de f est trivial. Cela signifie que f est injective et donc, en supposant l'espace ambiant de dimension finie, que f est inversible.

   Deuxième solution, sans hypothèse supplémentaire. On a :

$$\mathrm{id} = -\frac{1}{2}(f^3 - f^2 - 2f) = f \circ \Big(-\frac{1}{2}(f^2 - f - 2\,\mathrm{id})\Big) = \Big(-\frac{1}{2}(f^2 - f - 2\,\mathrm{id})\Big) \circ f$$

   donc f est inversible est son inverse est $f^{-1} = -\frac{1}{2}(f^2 - f - 2\,\mathrm{id})$.

4. Voir la deuxième solution de la question précédente.

---

1. En effet, choisissons un vecteur propre v de f associé à λ : on a donc $f(v) = \lambda v$ et $v \neq \vec{0}$. Alors $\vec{0} = \big(f^3 - f^2 - 2f + 2\,\mathrm{id}\big)(v) = f^3(v) - f^2(v) - 2f(v) + 2v = \lambda^3 v - \lambda^2 v - 2\lambda v + 2v = (\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 2)v$, d'où l'égalité voulue puisque $v \neq \vec{0}$.
2. Rappel : le noyau de f est l'espace propre associé à la valeur propre 0.

Exercice 2. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

puis déterminer si elles sont diagonalisables.

Solution.

1. Comme A est triangulaire, son polynôme caractéristique se calcule à vue : c'est $p_A(X) = (X-1)^3$. Le polynôme minimal de A est un diviseur de p_A ; pour le déterminer, on calcule les puissances de $A - \mathrm{I}_3$:

$$A - \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-\mathrm{I})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-\mathrm{I})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le polynôme minimal de A est $m_A = (X-1)^3$.

2. Pour B, il faut faire un calcul. En appliquant par exemple la règle de Sarrus, il vient :

$$p_B(X) = \begin{vmatrix} -X+1 & 1 & 1 \\ 1 & -X+1 & 1 \\ 0 & 1 & -X+1 \end{vmatrix} = (-X+1)^3 + 0 + 1 - 0 - (1-X) - (1-X) = -X^3 + 3X^2 - X.$$

Ce polynôme se factorise : $p_B(X) = -X(X^2 - 3X + 1)$. Le discriminant de $X^2 - 3X + 1$ est $\Delta = 5 > 0$ donc p_B admet trois racines distinctes. Comme le polynôme caractéristique de B est scindé à racines simples, on a : $m_B = p_B$.

3. *Première solution.* Comme le rang de C vaut 1 (toutes les colonnes sont égales), le noyau de C est de dimension 2. Comme la somme de chaque ligne de C vaut 3, le vecteur ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre 3. Par conséquent, la matrice C est diagonalisable, semblable à la matrice diagonale $\mathrm{diag}(0,0,3)$, son polynôme caractéristique est $p_C(X) = X^2(X-3)$ et son polynôme minimal est $m_C(X) = X(X-3)$.

Deuxième solution (dénuée de toute réflexion). On calcule directement :

$$p_C(X) = \begin{vmatrix} -X+1 & 1 & 1 \\ 1 & -X+1 & 1 \\ 1 & 1 & -X+1 \end{vmatrix} = (-X+1)^3 + 1 + 1 - 3(-X+1) = -X^3 + 3X^2.$$

On cherche la dimension du noyau de C : pour $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$Cv = \vec{0} \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \iff x+y+z=0 \iff v = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le noyau de C est de dimension 2 donc C est diagonalisable. Son polynôme minimal est donc scindé à racines simples et ses racines sont les mêmes que celles de p_C, d'où : $m_X(X) = X(X-3)$.

Exercice 3. Parmi les matrices suivantes, déterminer celles qui sont des projecteurs :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution. Un matrice M est (celle d')un projecteur SSI $M^2 = M$. On calcule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq B, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq C$$

donc A est le seul projecteur.

Quelques erreurs fréquentes

Le critère de diagonalisation pose problème à un certain nombre d'entre vous. Étant donné un endomorphisme f, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est diagonalisable ;

(ii) le polynôme minimal de f est scindé à racines simples ;

(iii) f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

En particulier *si* le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, *alors* f est diagonalisable (car, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, c'est un polynôme annulateur de f).
Attention, la réciproque est fausse (à part en dimension 1...) : il existe des endomorphismes diagonalisables dont le polynôme caractéristique est scindé mais pas à racines simples. Donnez-en quelques exemples !

Exercice 1

- C'est une erreur de penser que le polynôme $X^3 - X^2 - 2X + 2$ est le polynôme caractéristique de f. En effet, comme on ne connaît pas la dimension de l'espace ambiant, qui peut être n'importe quoi, on ne connaît même pas le degré du polynôme caractéristique !

  Tout ce que l'on peut dire avec l'hypothèse et la première question, c'est que les racines du polynôme caractéristique sont des éléments de $\{1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.
- Le fait qu'on ne connaît pas le polynôme caractéristique nous empêche d'appliquer le théorème de Cayley-Hamilton. Attention à l'orthographe du premier nom : CAYLEY.
- De même, c'est une erreur de penser que le polynôme $X^3 - X^2 - 2X + 2$ est le polynôme minimal de f. Tout ce que l'on sait, c'est que c'est un *diviseur* de ce polynôme. On en déduit que le polynôme minimal est scindé.
- (Polynôme caractéristique, bis.) Ce que l'on peut dire du polynôme caractéristique, c'est que :
  - les racines du polynôme caractéristique de f sont parmi $\{1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ (question 1) ;
  - l'endomorphisme f est diagonalisable puisqu'il annule un polynôme scindé à racines simples (question 2) ;
  - donc le polynôme caractéristique de f est scindé ;
  - le polynôme caractéristique est donc de la forme $(1 - X)^a \left(\sqrt{2} - X\right)^b \left(-\sqrt{2} - X\right)^c$, pour a, b et c entiers convenables.
- Questions complémentaires :

  (a) Quelles sont les valeurs possibles du polynôme minimal ? (Il y a sept réponses.)

  (b) Pour chacune de ces réponses, trouver un espace vectoriel et un endomorphisme f_1 qui a ce polynôme minimal et un polynôme caractéristique qui lui est égal et un espace vectoriel et un endomorphisme f_2 qui a ce polynôme minimal et un polynôme caractéristique qui en est différent. (Décrire f_1 et f_2 par leurs matrices.)
- C'est un problème de ne pas savoir factoriser $X^3 - X^2 - 2X + 2$: cela doit être un réflexe de chercher une « racine évidente », ici 1, puis il faut savoir factoriser $X - 1$. En plus des deux méthodes présentées ci-dessus, en voici une autre si on n'est vraiment pas inspiré : écrire une factorisation *a priori* et la développer :

  $$X^3 - X^2 - 2X + 2 = (X - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (-a + b)X^2 + (-b + c)X - c,$$

  puis identifier les coefficients : $a = 1$, $-a + b = -1$, $-b + c = -2$, $-c = 2$, d'où $a = 1$, $c = -2$, $b = 0$.

Exercice 2

- Les calculs de déterminants ont posé à certain·e·s des problèmes insurmontables. J'espère que les dizaines d'exercices faits pendant les vacances ont amélioré la situation !

  Une erreur vue au moins deux fois : factoriser $1-X$ dans $\begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$, c'est très, très faux !
- Quand on a calculé le polynôme caractéristique p_M d'une matrice M (ici A, B ou C), pas la peine de vérifier que $p_M(M) = 0_3$ puisque le théorème de Cayley-Hamilton le dit.
- Il peut être utile de pouvoir faire la liste des diviseurs (unitaires non constants) d'un polynôme. Pour les polynômes caractéristiques p_A, p_B et p_C de A, B et C, on trouve :
  (a) trois diviseurs unitaires non constants de $(1-X)^3$: $X-1$, $(X-1)^2$, $(X-1)^3$;
  (b) sept diviseurs unitaires non constants de $X(X-a)(X-b)$: X, $X-a$, $X-b$, $X(X-a)$, $X(X-b)$, $(X-a)(X-b)$, $X(X-a)(X-b)$ (ici, $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$; $0 \neq a \neq b \neq 0$) ;
  (c) quatre diviseurs unitaires non constants de $X^2(3-X)$: X, $X-3$, $X(X-3)$, $X^2(X-3)$.
- On a calculé le polynôme caractéristique et on cherche le polynome minimal. Pour raccourcir la liste des diviseurs à tester et pour justifier cet examen restreint, il faut (se) rappeler que le polynôme caractéristique et le polynôme minimal ont les mêmes racines. Dans les listes ci-dessus, les candidats pour être le polynôme minimal sont donc :
  (a) pour A : $X-1$, $(X-1)^2$, $(X-1)^3$;
  (b) pour B : $X(X-a)(X-b)$;
  (c) pour C : $X(X-3)$, $X^2(X-3)$.

  Par conséquent, il n'y a qu'à calculer $(A - \mathrm{I}_3)^2 \neq 0_3$ pour conclure que $m_A(X) = (X-1)^3$ et $C(C - 3\mathrm{I}_3) = 0_3$ pour conclure que $m_C(X) = X(X-3)$. Il n'y a rien à calculer pour B.
- Le théorème de Cayley-Hamilton n'apprend qu'une seule chose sur le polynôme minimal : que c'est un diviseur du polynôme caractéristique.

Orthographe

- Il faut accorder les noms et les adjectifs en nombre (singulier, pluriel) et en genre (masculin, féminin). Exemple : comme on dit « *un* polynôme », c'est que le mot « polynôme » est masculin et il ne faut donc pas écrire « le polynôme minimale ».
- Il faut conjuguer les verbes, c'est-à-dire adapter le temps et la personne. Avant le temps, il faut choisir le mode (indicatif, infinitif, participe...). Exemple : « on a montrer », ben, ça ne marche pas !
- L'expression « on a que » doit être supprimée, elle est inutile et (au mieux) très lourde.
- Le théorème qui exprime que le polynôme caractéristique annule une matrice ou un endomorphisme est attribué à CAYLEY et Hamilton. Ce n'est pas parce qu'il n'y a pas de champion automobile qui porte le nom de CAYLEY que vous ne pouvez pas retenir son nom.