

Contrôle continu n° 1

10 octobre 2017

Exercice 1. (7 pts) On admettra que l'application suivante est linéaire :

$$u : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(a, b, c, d) \longmapsto (2a - b + c + 3d, 4a - 2b + 2c + d, -2a + b - c - 3d)$$

1. (1 pt) Déterminer la matrice de u dans la base canonique.
2. (4 pts) Déterminer une base du noyau et une base de l'image de u .
3. (2 pts) Quelles sont les dimensions du noyau et de l'image ?

Exercice 2. (4 pts) Lesquelles des matrices suivantes sont inversibles ? Justifiez vos réponses.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. (9 pts) On notera A la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (2 pts) Calculer le déterminant de la matrice $A - \lambda I$.
2. (2 pts) Montrer que les nombres λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible sont 2 et -1 .
3. (4 pts) Déterminer une base pour chacun des noyaux de $A - 2I$ et $A + I$.
4. (1 pt) Déterminer une matrice de passage à une base dans laquelle A se représente par

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$