Université Lyon 1 - Licence STS - Automne 2017

Unité d'enseignement : Algèbre III
Partiel 26 octobre 2017
Durée : 1 h 30

Documents, ordinateurs, calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1. Répondre aux questions suivantes en justifiant brièvement.

1. Les espaces E et F sont engendrés par deux vecteurs non colinéaires donc ils sont tous deux de dimension 2. Comme $\dim(E) + \dim(F) > \dim(\mathbb{R}^3)$, ces sous-espaces ne sont pas en somme directe.
2. On peut prendre par exempe une matrice diagonale ou triangulaire dont les coefficients diagonaux valent 1 ou -2, chacun des deux étant choisis au moins une fois. Par exemple :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ \pi & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 \\ 8 & -\sqrt{3} & \cos(1) & 1 \end{pmatrix},$$
dont les polynômes caractéristiques sont respectivement $-(X-1)^3(X+2)$, $-(X-1)^2(X+2)^2$ et $-(X+2)^3(X-1)$. En effet, le déterminant d'une matrice diagonnale ou triangulaire est le produit des coefficients diagonaux.
3. On peut prendre une matrice diagonale ou triangulaire dont deux coefficients diagonaux valent 0 et le troisième -3, par exemple :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pi & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$
4. Comme la dernière ligne de A est nulle, son déterminant est nul : l'endomorphisme correspondant n'est donc pas surjectif.
5. La signature d'un produit de permutations est le produit des signatures et la signature d'un cycle de longueur ℓ est $(-1)^{\ell-1}$. Par suite : $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon\big((318)\big)\varepsilon\big((47)\big) = (-1)^{3-1} \times (-1)^{2-1} = -1$.
6. On a :
$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Ni v_1 ni v_2 ne sont des vecteurs propres de A donc E n'est pas un sous-espace propre de u. En revanche, on vérifie que $Av_1 = v_1 - v_2 \in E$ et que $Av_2 = v_1 + v_2 \in E$, donc E est stable par u.

Exercice 2.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice dans la base canonique d'un endomorphisme u.

   (a) Le polynôme caractéristique de u est :
$$P_u(X) = \begin{vmatrix} 5-X & -6 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = -X(5-X) - (-6) = X^2 - 5X + 6,$$
   polynôme qui admet deux racines évidentes [1] : 2 et 3.

1. Ceux et celles qui ne trouveraient pas ces racines évidentes pourraient calculer le discriminant, etc.

Soit $v = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$. Alors v est un vecteur propre de u pour la valeur propre $\lambda \in \{2,3\}$ si et seulement si $(A - \lambda \mathrm{I}_2)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.
Pour $\lambda = 3$, cela donne le système :

$$(A - 3\mathrm{I}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \iff x - 3y = 0.$$

L'espace propre associé à la valeur propre 3 est donc la droite dirigée par $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Pour $\lambda = 2$, cela donne le système :

$$(A - 2\mathrm{I}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \iff x - 2y = 0.$$

L'espace propre associé à la valeur propre 2 est donc la droite dirigée par $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) D'après le cours, on a donc :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{où } P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) On en déduit que $A^n = PD^nP^{-1}$. Pour calculer P^{-1}, on remarque que $\det(P) = 1$ et la transposée de la comatrice de P est $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^{n+1} & 2^{n+1} \\ 3^n & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2^{n+1} & -2\cdot 3^{n+1} + 3\cdot 2^{n+1} \\ 3^n - 2^n & -2\cdot 3^n + 3\cdot 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. (a) On calcule D_2 directement et D_3 en développant par rapport à la première colonne :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 6 = 19\,;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 \times D_2 - 3 \times 10 = 95 - 30 = 65.$$

(b) Pour calculer D_n, on développe par rapport à la première colonne. Le cofacteur d'indice $(1,1)$ s'obtient en supprimant la première ligne et la deuxième colonne de la matrice qui définit D_n : son déterminant est D_{n-1}. Le cofacteur d'indice $(2,1)$ est le déterminant de la matrice de taille $(n-1)\times(n-1)$ suivante :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 5 & 2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 3 & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}_{n-1)\times(n-1)} = 2\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}_{n-2)\times(n-2)} = 2D_{n-2}$$

(l'égalité s'obtient en développant par rapport à la première ligne : il apparaît un facteur 2 et le cofacteur correspondant a pour déterminant D_{n-2}). Ainsi :

$$D_n = 5D_{n-1} - 3 \times 2D_{n-2} = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}.$$

3. (a) On a :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} D_{n+2} \\ D_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5D_{n+1} - 6D_n \\ D_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{n+1} \\ D_n \end{pmatrix} = AU_n.$$

Une récurrence immédiate donne alors : $U_{n+1} = A^n U_1$.

(b) Pour calculer D_{n+1}, on calcule la ligne du bas de $A^n U_1$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_{n+2} \\ D_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2^{n+1} & -2 \cdot 3^{n+1} + 3 \cdot 2^{n+1} \\ 3^n - 2^n & -2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} *** \\ 19 \cdot 3^n - 19 \cdot 2^n - 10 \cdot 3^n + 15 \cdot 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$D_{n+1} = 9 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n = 3^{n+2} - 2^{n+2}.$$

On retrouve $D_1 = 3^2 - 2^2 = 5$, $D_2 = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19$, $D_3 = 3^4 - 2^4 = 81 - 16 = 65$.