Contrôle continu n° 1

10 octobre 2017

Exercice 1. (7 pts)

1. On écrit la matrice de u dans les bases canoniques par colonnes, en prenant successivement pour (a, b, c, d) les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. *Première solution.* Déterminons le noyau de u. Soit $v = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Alors

$$v \in \ker(u) \iff \begin{cases} 2a & -b & +c & +3d & = 0 \\ 4a & -2b & +2c & +d & = 0 \\ -2a & +b & -c & -3d & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a & -b & +c & +3d & = 0 & \\ & & & -5d & = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & & & 0 & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{cases}$$

$$\iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a = & \lambda & \\ b = & & \mu \\ c = & -2\lambda & +\mu \\ d = & 0 & \end{cases}$$

La famille $(k_1, k_2) = \big((1, 0, -2, 0), (0, 1, 1, 0)\big)$ engendre donc le noyau de u et elle est libre (si $\lambda k_1 + \mu k_2 = \vec{0}$, alors $\lambda = \mu = 0$) : c'est une base.

On en déduit que $\dim \ker(u) = 2$ puis, par le théorème du rang, que $\mathrm{rg}(u) = 4 - 2 = 2$. Les colonnes de A engendrent l'image de u, on peut sélectionner deux vecteurs colinéaires parmi eux, par exemple $(i_1, i_2) = \big((-1, -2, 1), (3, 1, -3)\big)$.

Deuxième solution. Notons $C_1, \ldots, C_4$ les colonnes de A. On constate que C_1, C_2 et C_3 sont liées par les relations $C_1 = -2C_2$ et $C_3 = -C_1$. Cela entraîne que les vecteurs $(1, -2, 0, 0)$ et $(1, 0, -1, 0)$ appartiennent au noyau de u. Par conséquent, le noyau de u est de dimension au moins 2.

Par ailleurs, les colonnes C_1 et C_4 ne sont pas colinéaires donc la famille (C_1, C_4) est libre [1]. Par conséquent, le rang de u vaut au moins 2. Mais par le théorème du rang, on a :

$$4 = \dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker u + \mathrm{rg}\, u \leq 2 + 2 = 4.$$

Par conséquent, les inégalités ci-dessus sont des égalités : $\dim \ker u = 2 = \mathrm{rg}\, u$, et les familles (k_1, k_2) et $(i_1, i_2) = \big((2, 4, 2), (3, 1, -3)\big)$ (provenant de C_1 et C_4) sont des bases du noyau et de l'image de u.

3. Dimensions du noyau et de l'image de u : voir ci-dessus.

1. Attention, ce n'est vrai que parce qu'il n'y a que deux vecteurs !

Exercice 2. La première matrice n'est pas carrée donc elle n'est pas inversible.

Pour la deuxième matrice, on calcule le déterminant. En remplaçant sa deuxième colonne C_2 par la somme des deux premières colonnes, on ne change pas le déterminant mais on annule le coefficient central, ce qui permet de développer facilement selon la deuxième ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

de sorte que la matrice est inversible.

Quant à la troisième matrice, elle est triangulaire supérieure donc son déterminant est le produit des coefficients diagonaux, à savoir $2 \times (-4) \times 1 \neq 0$: cette matrice est inversible.

Exercice 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Pour calculer le polynôme caractéristique, on utilise le premier coefficient de la troisième ligne comme un pivot, ce qui conduit aux substitutions $L_1 \leftarrow$; puis on développe par rapport à la première colonne :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

2. (2 pts) Montrer que les nombres λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible sont 2 et -1.
3. (4 pts) Déterminer une base pour chacun des noyaux de $A - 2I$ et $A + I$.
4. (1 pt) Déterminer une matrice de passage à une base dans laquelle A se représente par

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$