Partiel du Mercredi 2 novembre 2016 : Correction

Exercice 1. *Soient* $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés et* $f : E \to F$ *une application linéaire.*

1. *On suppose pour cette question que* f *est bornée par un réel positif* K *sur la boule fermée unité, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in \overline{B}_E(0_E, 1),\ \|f(x)\|_F \leq K.$$

   (a) *Montrer que* $\forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E$.
   Il suffit de montrer l'inégalité demandée pour $x \neq 0_E$: comme $\|f(0_E)\|_F = \|0_F\|_F = 0$ il est clair qu'elle est vraie pour $x = 0_E$. Soit donc $x \in E \setminus \{0\}$; considérons $y = \frac{x}{\|x\|_E}$. Alors $\|y\|_E = 1$, donc l'hypothèse de l'énoncé donne $\|f(y)\|_F \leq K$. De plus, puisque f est linéaire on a

$$f(y) = f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) = \frac{f(x)}{\|x\|_E}\ .$$

   On vient donc de montrer que, pour tout $x \neq 0_E$, on a $\|\frac{f(x)}{\|x\|_E}\|_F \leq K$, autrement dit $\|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E$.

   (b) *En déduire que* f *est* K*-lipschitzienne.*
   Soit maintenant $x, x' \in E$. En utilisant le fait que f est linéaire, on peut écrire :

$$\|f(x) - f(x')\|_F = \|f(x - x')\|_F \leq K\|x - x'|_E\ .$$

   (l'inégalité ci-dessus vient du résultat de la question précédente) On vient de montrer que f est K-lipschitzienne.

2. *Montrer que si* f *est continue en un point* $a \in E$ *alors* f *est continue en* 0_E.
   Soit x_n une suite d'éléments de E qui converge vers 0_E. On doit montrer que $f(x_n)$ converge vers $f(0_E) = 0_F$. Comme $x_n + a$ converge vers a, et f est continue en a, on sait que $f(x_n + a) = f(x_n) + f(a)$ converge vers $f(a)$. Par conséquent, $f(x_n)$ converge vers 0_F et on a bien montré que f est continue en 0_E.

3. *On suppose pour cette question que* f *est continue en* 0_E.

   (a) *Montrer qu'il existe un réel* $K > 0$ *tel que* f *est bornée par* 1 *sur la boule fermée* $\overline{B}_E(0_E, 1/K)$.
   Comme f est continue en 0_E et $f(0_E) = 0_F$, le fait que f soit continue en 0_E nous garantit l'existence de $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$ on ait

$$\|x\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq 1\ .$$

   En posant $K = \frac{1}{\delta}$, on vient bien d'obtenir $K > 0$ tel que f est bornée par 1 sur la boule fermée $\overline{B}_E(0_E, 1/K)$.

(b) *En déduire que f est bornée par K sur la boule fermée unité.*
Pour tout x dans la boule unité fermée, $\frac{x}{K}$ appartient à $\overline{B}_E(0_E, 1/K)$, par conséquent $\|f(\frac{x}{K})\|_F \leq 1$; comme $f(\frac{x}{K}) = \frac{f(x)}{K}$, ceci revient à dire que $\|f(x)\|_F \leq K$ pour tout x dans la boule fermée unité, ce qu'on voulait démontrer.

Exercice 2. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(Y, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f\colon (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ une fonction mesurable. Soit l'application ν définie sur $\mathcal{B}$ par $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$ pour $B \in \mathcal{B}$. Montrer que ν est une mesure sur Y.*
Notons tout d'abord que ν est bien définie sur $\mathcal{B}$ et à valeurs dans $[0, +\infty]$: en effet, si $B \in \mathcal{B}$ alors $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ puisque f est mesurable, et $\mu(f^{-1}(B)) \in [0, +\infty]$ puisque μ est une mesure. Il suffit maintenant de vérifier les axiomes définissant une mesure :

1. On a $\nu(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ puisque μ est une mesure.
2. Soit (B_n) une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints. Alors pour tout n $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$ puisque f est mesurable ; de plus ces ensembles sont deux à deux disjoints : si jamais on avait $i \neq j$ et $x \in f^{-1}(B_i) \cap f^{-1}(B_j)$ alors on aurait $f(x) \in B_i \cap B_j$, ce qui est impossible. En utilisant le fait que μ est une mesure, on a donc

$$\nu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = \mu(f^{-1}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i)) = \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_i)) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(f^{-1}(B_i)) = \sum_{i=0}^{+\infty} \nu(B_i) \ .$$

On a donc bien établi que ν est une mesure.

Exercice 3. 1. *Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, on a $\ln(1+t) \leq t$.* L'inégalité est clairement vraie en $t = 0$. Pour la montrer pour tout $t > 0$, on peut étudier le tableau de variations de $t \mapsto \ln(1+t) - t$, ou directement appliquer le théorème des accroissements finis pour affirmer que pour tout $t > 0$ il existe $c \in]1, 1+t[$ tel que

$$\ln(1+t) = \ln(1+t) - \ln(1) = \ln'(c)(1+t-1) = \frac{t}{c} \leq t \ .$$

2. *Étudier la convergence de la suite $\left(\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.* On considère la suite de fonctions $f_n\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} & \text{si } x \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \ .$$

Ces fonctions sont continues par morceaux et donc boréliennes ; de plus, elle sont à valeurs positives et pour tout x fixé, pour n suffisamment grand on a

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} = e^{n\ln(1+\frac{x}{n})-2x} = e^{x+o(1)-2x} \ ,$$

qui converge vers e^{-x}. Enfin, l'inégalité de la question précédente nous permet d'affirmer que $n\ln(1+\frac{x}{n}) \leq x$, par conséquent on a $f_n(x) \leq e^{-x}$ pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout $n \geq 1$.

Comme $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, les hypothèses pour appliquer le théorème de convergence dominée sont réunies, et on peut conclure que $\displaystyle\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx = \int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$.

Exercice 4. *On fixe un réel $\alpha > 0$ et on considère la suite de fonctions $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = -x^{\alpha-1+n}\ln x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,1[$.*

1. *Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge simplement vers la fonction S définie par $S(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}\ln x}{x-1}$ pour tout $x \in]0,1[$.*

   Fixons $x \in]0,1[$; notons tout de suite que les fonctions f_n sont toutes à valeurs positives, ainsi on sait d'avance que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge dans $[0, +\infty]$ (éventuellement vers $+\infty$). On peut directement calculer

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) &= \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} -x^{\alpha-1+n}\ln x \\ &= -x^{\alpha-1}\ln(x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{-x^{\alpha-1}\ln x}{1-x}.\end{aligned}$$

   (la dernière égalité provient simplement de la formule donnant la valeur de la somme des termes d'une série géométrique de raison dans $]-1,1[$)

2. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.*

   Fixons $n \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une intégration par parties (toutes les fonctions impliquées sont de classe C^1) on obtient (en notant que $\alpha + n > 0$ puisque $\alpha > 0$ et $n \geq 0$; en particulier, ci-dessous on ne divise pas par 0, et on utilise les croissances comparées pour conclure que $\ln(x)x^{\alpha+n}$ tend vers 0 quand x tend vers 0) :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)dx &= \left[-\frac{\ln(x)x^{\alpha+n}}{\alpha+n}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{\alpha+n-1}}{\alpha+n}dx \\ &= 0 + \left[\frac{x^{\alpha+n}}{(\alpha+n)^2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{(\alpha+n)^2}\end{aligned}$$

3. *En déduire que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha+n)^2} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}\ln x}{x-1}dx$$

Comme toutes les fonctions f_n sont à valeurs positives, le théorème de convergence monotone nous permet d'écrire que

$$\int_0^1 S(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \ .$$

Autrement dit, on vient d'obtenir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha+n)^2} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}\ln x}{x-1}dx \ .$$