

## Chapitre 2

# Fonctions continues entre espaces métriques

### 2.1 Fonctions continues et uniformément continues

Maintenant qu'on sait ce qu'est une distance, on peut définir la continuité pour des fonctions entre espaces métriques, plutôt que de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ; c'est essentiellement la même chose, en remplaçant  $|x - y|$  (qui n'a a priori pas de sens dans un espace métrique) par  $d(x, y)$ .

**Définition 2.1.** Soit  $(X, d)$  et  $(Y, D)$  deux espaces métriques,  $f: X \rightarrow Y$  et  $x \in X$ . On dit que  $f$  est *continue en  $x$*  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' \in X \ d(x, x') < \delta \Rightarrow D(y, y') < \varepsilon .$$

On dit que  $f$  est *continue sur  $X$*  si elle est continue en  $x$  pour tout  $x \in X$ , autrement dit :

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' \in X \ d(x, x') < \delta \Rightarrow D(f(x), f(x')) < \varepsilon .$$

Ou encore (l'ordre dans lequel on écrit les deux  $\forall$  ne change pas le sens de l'énoncé) :

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in X \exists \delta > 0 \forall x' \in X \ d(x, x') < \delta \Rightarrow D(f(x), f(x')) < \varepsilon .$$

Il faut bien comprendre que, ci-dessus,  $\delta$  dépend de  $\varepsilon$  et du point  $x$  où l'on se place. Une définition plus forte imposerait que le même  $\delta$  fonctionne pour tous les  $x \in X$  simultanément; dans ce cas, on dit que  $f$  est *uniformément continue*.

**Définition 2.2.** Soit  $(X, d)$  et  $(Y, D)$  deux espaces métriques, et  $f: X \rightarrow Y$ . On dit que  $f$  est *uniformément continue sur  $X$*  si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X \ \forall x' \in X \ d(x, x') < \delta \Rightarrow D(f(x), f(x')) < \varepsilon .$$

Par rapport à la définition de la continuité, on a remplacé " $\forall x \in X \ \exists \delta > 0$ " par " $\exists \delta > 0 \ \forall x \in X$ " :  $\delta$  dépend toujours de  $\varepsilon$ , mais ne dépend plus de  $x$ . Toute fonction uniformément continue est continue, mais la réciproque est fausse.

**Exercice 2.3.** Montrer que la fonction  $x \mapsto x^2$  n'est pas uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 2.4.** Pour chacun des énoncés suivants, déterminer toutes les fonctions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui le satisfont :

1.  $\exists \delta > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in X \ \forall x' \in X \ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$ .
2.  $\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in X \ \forall x' \in X \ \exists \delta > 0 \ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$ .

**Définition 2.5.** Soit  $(X, d)$  et  $(Y, D)$  deux espaces métriques. On dit que  $f: X \rightarrow Y$  est *lipschitzienne* s'il existe  $K > 0$  tel que

$$\forall x, x' \in X \ D(f(x), f(x')) \leq Kd(x, x') .$$

**Exercice 2.6.** Montrer que toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

**Exercice 2.7.** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable, et telle qu'il existe  $M$  satisfaisant  $|f'(x)| \leq M$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est lipschitzienne.

**Théorème 2.8.** Soit  $(X, d)$  et  $(Y, D)$  deux espaces métriques,  $f: X \rightarrow Y$  une fonction et  $x \in X$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $f$  est continue en  $x$ .
- Pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  qui converge vers  $x$ , la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $f(x)$ .

**Preuve:**

Supposons tout d'abord que  $f$  est continue en  $x$ , et fixons une suite  $(x_n)$  qui converge vers  $x$  ainsi que  $\varepsilon > 0$ . D'une part il existe  $\delta > 0$  tel que  $D(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$  dès que  $d(x, x') < \delta$ ; d'autre part il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $d(x_n, x) \leq \delta$  pour tout  $n \geq N$ . Alors, pour tout  $n \geq N$ , on a  $d(f(x_n), f(x)) \leq \varepsilon$ , ce qui prouve que  $(f(x_n))$  converge vers  $f(x)$ .

Réciproquement, supposons que  $f$  ne soit pas continue en  $x$  :

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists y \in X \ d(x, y) < \delta \text{ et } d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon .$$

Fixons  $\varepsilon > 0$  comme ci-dessus, et appliquons la propriété pour  $\delta = \frac{1}{n}$  : ceci nous donne une suite  $(y_n)$  telle que  $d(x, y_n) < \frac{1}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  (en particulier,  $(y_n)$  converge vers  $x$ ) mais  $d(f(y_n), f(x)) \geq \varepsilon$  (par conséquent,  $f(y_n)$  ne converge pas vers  $f(x)$ ).

**Théorème 2.9.** Soit  $(X, d)$  et  $(Y, D)$  deux espaces métriques et  $f: X \rightarrow Y$  une fonction. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est continue.
2. Pour tout ouvert  $O$  de  $Y$ ,  $f^{-1}(O)$  est un ouvert de  $X$ .
3. Pour tout fermé  $F$  de  $Y$ ,  $f^{-1}(F)$  est un fermé de  $X$ .

On rappelle que  $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$  désigne l'image inverse de  $A$  par  $f$ .

**Preuve:**

Supposons que  $f$  est continue, et soit  $O$  un ouvert de  $Y$ . Fixons  $x \in f^{-1}(O)$ , et considérons une suite  $(x_n)$  qui tend vers  $x$ . Alors  $f(x_n)$  tend vers  $f(x)$  puisque  $f$  est continue, donc  $f(x_n)$  appartient à  $O$  pour  $n$  suffisamment grand puisque  $f(x) \in O$  et  $O$  est ouvert. Par conséquent,  $x_n \in f^{-1}(O)$  pour  $n$  suffisamment grand, ce qui nous montre que  $f^{-1}(O)$  est ouvert, et on a montré que (1)  $\Rightarrow$  (2).

Si (2) est vrai et  $F$  est fermé dans  $Y$ , alors  $Y \setminus F$  est ouvert et par hypothèse on obtient que  $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$  est ouvert dans  $X$ , autrement dit  $f^{-1}(F)$  est fermé dans  $X$ . Ceci établit l'implication (2)  $\Rightarrow$  (3), et en fait le même argument de passage au complémentaire donne l'implication réciproque (3)  $\Rightarrow$  (2).

Il nous reste à prouver que (2)  $\Rightarrow$  (1) ; supposons donc de nouveau que (2) soit vérifié, et considérons  $x \in X$  et  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $B(f(x), \varepsilon)$  est un ouvert contenant  $f(x)$ , son image inverse est par hypothèse un ouvert contenant  $x$ , par conséquent il existe  $\delta > 0$  tel que  $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ , c'est-à-dire :

$$\forall x' \in X \ d(x, x') < \delta \rightarrow D(f(x), f(x')) < \varepsilon .$$

On a bien montré que  $f$  est continue.

On voit dans cette preuve qu'il vaut mieux être à l'aise avec les propriétés de l'image inverse par une fonction... Ce sera aussi très important dans la partie du cours consacrée à la théorie de la mesure !

**Exercice 2.10.** Soit  $X, Y$  deux ensembles,  $f: X \rightarrow Y$  une fonction. Montrer que, pour tout  $A, B \subseteq Y$  on a  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$  et  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ .

**Exercice 2.11.** Déterminer des images inverses ?

**Proposition 2.12.** Soit  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  et  $(Z, d_Z)$  trois espaces métriques, ainsi que  $f: Y \rightarrow Z$  et  $g: X \rightarrow Y$  deux fonctions continues. Alors  $f \circ g: X \rightarrow Z$  est continue.

**Preuve:**

Fixons  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f$  est continue, il existe  $\delta_1 > 0$  tel que pour tout  $y, y' \in Y$  on ait  $d_Y(y, y') < \delta_1 \Rightarrow d_Z(f(y), f(y')) < \varepsilon$ . Puis, comme  $g$  est continue, il existe  $\delta_2$  tel que pour tout  $x, x' \in X$  on ait  $d_X(x, x') < \delta_2 \Rightarrow d_Y(g(x), g(x')) < \delta_1$ . On a alors, pour tout  $x, x' \in X$  :

$$d_X(x, x') < \delta_2 \Rightarrow d_Y(g(x), g(x')) < \delta_1 \Rightarrow d_Z(f(g(x)), f(g(x'))) < \varepsilon .$$

On vient de prouver que  $f \circ g$  est continue.

**Exercice 2.13.** On munit  $\mathbb{R}^2$  de la distance induite par  $\|\cdot\|_\infty$ , et  $\mathbb{R}$  de sa distance usuelle. Montrer que les fonctions  $(x, y) \mapsto x + y$  et  $(x, y) \mapsto xy$  sont continues.

**Exercice 2.14.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues. Montrer que la somme  $f + g$  et le produit  $fg$  sont également des fonctions continues.

**Exercice 2.15.** Soit  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  et  $(Z, d_Z)$  trois espaces métriques, ainsi que  $f: Y \rightarrow Z$  et  $g: X \rightarrow Y$  deux fonctions uniformément continues. Montrer que  $f \circ g: X \rightarrow Z$  est uniformément continue.

## 2.2 Suites de fonctions

Tout comme la continuité, les notions de convergence simple/uniforme de suites de fonctions qu'on connaît pour des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  s'étendent sans difficultés aux fonctions entre espaces métriques.

**Définition 2.16.** Soit  $(X, d)$ ,  $(Y, D)$  deux espaces métriques, et  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $X$  dans  $Y$ . On dit que  $(f_n)$  converge *simplement* vers une fonction  $f: X \rightarrow Y$  si pour tout  $x \in X$  la suite  $(f_n(x))$  converge vers  $f(x)$  ; autrement dit :

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N D(f_n(x), f(x)) < \varepsilon .$$

Ci-dessus,  $N$  dépend à la fois de  $\varepsilon$  et de  $x$  ; comme dans la définition de la continuité, on pourrait demander que  $N$  ne dépende que de  $\varepsilon$ , et on obtient ainsi la définition de la convergence *uniforme*.

**Définition 2.17.** Soit  $(X, d)$ ,  $(Y, D)$  deux espaces métriques, et  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $X$  dans  $Y$ . On dit que  $(f_n)$  converge *uniformément* vers une fonction  $f: X \rightarrow Y$  si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in X \forall n \geq N D(f_n(x), f(x)) < \varepsilon .$$

Bien entendu, la convergence uniforme entraîne la convergence simple. La réciproque est fautive, comme le montre l'exercice suivant.

**Exercice 2.18.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $f_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  en posant

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \\ 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases} .$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , représenter le graphe de la fonction  $f_n$ , puis montrer que  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction  $f$  que l'on déterminera. La convergence est-elle uniforme ?  $f$  est-elle continue ?

On voit donc que la convergence simple ne préserve pas la continuité (ce qui sera une bonne raison, plus tard, pour travailler avec des fonctions *mesurables* plutôt que des fonctions continues).

**Proposition 2.19.** Soit  $(X, d)$  et  $(Y, D)$  deux espaces métriques, et  $(f_n)$  une suite de fonctions continues de  $X$  dans  $Y$ . Si  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f: X \rightarrow Y$  alors  $f$  est continue.

**Preuve:**

Fixons  $\varepsilon > 0$  et  $x \in X$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ , on ait  $D(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$  pour tout  $x \in X$ .

Fixons un tel  $N$  ; comme  $f_N$  est continue, il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x' \in X$ ,

$$d(x, x') < \delta \Rightarrow D(f_N(x), f_N(x')) < \varepsilon .$$

Alors on a, pour tout  $x' \in X$  tel que  $d(x, x') < \delta$  :

$$\begin{aligned} D(f(x), f(x')) &\leq D(f(x), f_N(x)) + D(f_N(x), f_N(x')) + D(f_N(x'), f(x')) \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\ &= 3\varepsilon . \end{aligned}$$

Comme  $\varepsilon$  était quelconque, ceci suffit à démontrer que  $f$  est continue en  $x$ .

**Exercice 2.20.** Montrer qu'une limite uniforme de fonctions uniformément continues est uniformément continue.

**Exercice 2.21.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $f: X \rightarrow [0, 1]$  une fonction uniformément continue. Montrer que  $f$  est une limite uniforme de fonctions lipschitziennes.