Chapitre 4

Tribus et mesures

4.1 Tribus

Intuitivement, la mesure d'une partie doit nous donner une idée de sa "taille" ; pour un intervalle, une mesure naturelle serait sa longueur, pour un disque ce serait l'aire, le volume pour une boule... On va bientôt donner une définition abstraite de ce qu'est une mesure, et en particulier on parlera de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ (qui généralise la notion de longueur pour $n = 1$, d'aire pour $n = 2$, de volume pour $n = 3$). Abstraitement, on souhaiterait qu'une notion de mesure ait les propriétés réunies dans la définition suivante.

Définition 4.1 (première tentative de définition d'une mesure)**.** Une mesure sur un ensemble X est une application $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ avec les propriétés suivantes :

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de X deux à deux disjointes, c'est-à-dire si $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$, alors $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \mu(A_i)$.

Ci-dessus, $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X. En pratique, on se heurte à des problèmes si l'on souhaite vraiment que *toutes* les parties de X soient mesurables. Par exemple, considérons le cas où X est le cercle unité $\{e^{i\alpha}\colon \alpha \in \mathbb{R}\}$ et T l'application $e^{i\alpha} \mapsto e^{i(\alpha+1)} = e^i e^{i\alpha}$. C'est une rotation : si on espère pouvoir définir une mesure μ sur X qui étend la notion de longueur d'un arc de cercle, elle devrait être préservée par T, c'est-à-dire que pour tout A on aurait $\mu(A) = \mu(T(A))$.

Par ailleurs, il n'est pas dur de vérifier que, pour tout x, on a $T^n(x) \neq T^m(x)$ dès que $n \neq m$; ainsi chaque ensemble $\{T^n(x)\colon n \in \mathbb{Z}\}$ (l'*orbite* de x) est infini. D'autre part, pour tout x, y, soit x et y ont la même orbite, soit leurs orbites sont disjointes ; imaginons un ensemble A obtenu en choisissant exactement un point dans chaque orbite. Alors, pour tout $n \neq 0$, $A \cap T^n(A) = \emptyset$: si $x \in A$ et $x \in T^n(A)$, alors x et $T^{-n}(x)$ sont deux éléments distincts de la même orbite, qui appartiennent à A tous les deux, ce qui est interdit. Et pour tout x on doit avoir un élément de l'orbite de x qui appartient à A, ce qui revient à dire que x appartient à un $T^n(A)$ pour un $n \in \mathbb{Z}$.

Tout ce qu'on vient de dire signifie que

$$X = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} T^n(A) \ .$$

Mais on voudrait avoir $\mu(T^n(A)) = \mu(A)$ pour tout n ; alors, si $\mu(A) > 0$, la définition d'une mesure (et le fait qu'on peut écrire $\mathbb{Z} = \{n_k\colon k \in \mathbb{N}\}$, ce sur quoi on reviendra) nous donne $\mu(X) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(A) = +\infty$. Ce n'est pas raisonnable pour une mesure supposée étendre la notion de longueur : on devrait avoir $\mu(X) = 2\pi$. Mais si $\mu(A) = 0$ la même équation nous donne cette fois-ci $\mu(X) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 0 = 0$.

On doit donc abandonner l'espoir d'avoir une mesure sur le cercle qui étende la notion de longueur, qui soit invariante par les rotations, et pour laquelle tout ensemble soit mesurable.

Heureusement, on n'a pas vraiment beson de mesurer absolument toutes les parties : celles que l'on est amené à rencontrer ne sont pas quelconques, mais ont une définition plus ou moins explicite. Mais, si l'on ne peut pas mesurer toutes les parties, alors quelles propriétés doit satisfaire l'ensemble des parties mesurables ?

Définition 4.2. Soit X un ensemble, et $\mathcal{A}$ une famille de parties de X. On dit que $\mathcal{A}$ est une *tribu* si $\mathcal{A}$ satisfait les conditions suivantes :

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$ et $X \in \mathcal{A}$.
2. Si $A \in \mathcal{A}$ alors $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
3. Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$.

On dit alors que $(X, \mathcal{A})$ est un *espace mesurable*

Par exemple, la famille $\mathcal{P}(X)$ formée par toutes les parties de X est une tribu. La famille $\{\emptyset, X\}$ n'ayant que $\emptyset$ et X comme éléments en est une aussi. Mais il y a bien d'autres exemples ; décrivons-en un.

Exemple. Soit X un ensemble, et B une partie de X. Alors

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \colon B \subseteq A \text{ ou } B \subseteq X \setminus A\}$$

est une tribu.

Notons que, si $\mathcal{A}$ est une tribu, alors $\mathcal{A}$ est stable par union finie : si $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, alors la suite obtenue en posant $A_i = \emptyset$ pour $i \geq n+1$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, et

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i = \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

On voit aussi que, si (A_i) est une suite de parties de $\mathcal{A}$, alors $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$: en effet,

$$\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i = X \setminus \bigcup_{i=0}^{+\infty} (X \setminus A_i) \ .$$

Enfin, on voit que si A, B appartiennent à une tribu $\mathcal{A}$, alors $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ y appartient aussi.

On peut produire beaucoup de tribus grâce à la propriété suivante.

Proposition 4.3. *Soit X un ensemble, et $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur X. Alors $\mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A}_i$ est une tribu.*

La preuve est facile pour peu que vous compreniez ce que peut bien être l'intersection d'une famille de tribus... Elle est donc laissée en exercice (recommandé !).

En particulier, si $\mathcal{E}$ est un ensemble de parties de X, il existe toujours une plus petite tribu contenant $\mathcal{E}$: l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{E}$. On l'appelle *tribu engendrée* par $\mathcal{E}$ et on la note $\sigma(\mathcal{E})$. Si $\mathcal{A}$ est une tribu, et $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ est tel que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$, on dit que $\mathcal{A}$ est *engendrée par* $\mathcal{E}$.

Définition 4.4. Soit (X, d) un espace métrique. La *tribu borélienne* sur X est la tribu engendrée par les ouverts, c'est-à-dire la plus petite tribu contenant tous les ouverts, et est notée $\mathcal{B}(X)$.

En pratique, on va surtout manipuler les tribus boréliennes sur les espaces $\mathbb{R}^n$.

On voudrait maintenant expliquer le théorème suivant.

Théorème 4.5. *Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Alors il existe une suite (I_n) d'intervalles ouverts telle que*

$$O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \ .$$

Avant de passer à sa démonstration, notons une conséquence.

Exercice 4.6. La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ est la tribu engendrée par les intervalles ouverts.

Définition 4.7. Un ensemble A est *dénombrable* s'il existe une bijection $f \colon \mathbb{N} \to A$, c'est-à-dire si l'on peut écrire $A = \{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ avec des a_i deux à deux distincts.

Théorème 4.8.
1. *Si A est infini et il existe une injection de A dans $\mathbb{N}$, alors A est dénombrable.*
2. *Si A est infini et il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur A, alors A est dénombrable.*
3. *Si A, B sont dénombrables alors $A \times B$ est dénombrable.*

4. *Si* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'ensembles dénombrables alors* $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ *est dénombrable.*

Exercice 4.9. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Passons maintenant à la preuve du théorème 4.5.

Preuve: S

oit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Commençons par fixer une énumération de tous les intervalles ouverts dont les deux extrémités sont rationnelles : $\{]a,b[\colon a,b\in\mathbb{Q}\} = \{I_n\}_n \in \mathbb{N}$ (c'est possible exactement parce que $\mathbb{Q}$, et donc $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, est dénombrable). Soit $A = \{n\in\mathbb{N}\colon I_n \subseteq O\}$. Pour conclure, il nous suffit de montrer que $O = \bigcup_{n\in A} I_n$; l'inclusion de droite à gauche est immédiate (pour $n\in A$, $I_n\subseteq O$, et donc leur réunion est aussi contenue dans O). Pour voir l'inclusion réciproque, fixons $x\in O$. Comme O est ouvert, il existe $r>0$ tel que $]x-r,x+r[\subseteq O$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe q_1,q_2 tels que $x-r<q_1<x<q_2<x+r$; alors l'intervalle $]q_1,q_2[$ est un intervalle d'extrémités rationnelles, qui contient x, ce qui montre comme espéré que $x\in\bigcup_{n\in A} I_n$.

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler ici le théorème suivant (qui est essentiel pour que la théorie de la mesure puisse avoir un intérêt...).

Théorème 4.10. $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

4.2 Mesures

Évidemment, un espace mesurable est là pour être mesuré ! Et maintenant, on peut donner la "vraie" définition d'une mesure.

Définition 4.11. Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable. Une *mesure* sur X est une application $\mu\colon\mathcal{A}\to[0,+\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\mu(\emptyset)=0$.
2. Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ et $A_i\cap A_j=\emptyset$ pour tout $i\neq j$ alors
$$\mu\Big(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\Big)=\sum_{i=0}^{+\infty}\mu(A_i)\ .$$

Dans le cas particulier où $\mu(X)=1$, on dit que μ est une *mesure de probabilité*.

La seconde propriété ci-dessus est appelée *σ-additivité* de la mesure.

Définition 4.12. Comme on autorise que des parties aient une mesure infinie (intuitivement, la mesure généralise les notions de longueur/d'aire/de volume, et on « voit »bien que $\mathbb{R}$, par exemple, est de longueur infinie), il faut donner quelques précisions :

— Pour tout $t\in[0,+\infty]$, $+\infty+t=t+\infty=+\infty$.
— Pour tout t *fini*, $+\infty-t=+\infty$.
— $(+\infty)-(+\infty)$ n'est pas défini.

Dans l'énoncé des propriétés de l'intégrale, on va aussi devoir écrire des multiplications, avec les conventions suivantes :

— $0\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot 0=0$.
— Si $t>0$, $t\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot t=+\infty$.

Exemple. On peut définir une mesure sur $(X,\mathcal{P}(X))$ en posant $\mu(A)=0$ pour tout A, ou encore $\mu(\emptyset)=0$ et $\mu(A)=+\infty$ dès que A est non vide.

Ces mesures ne sont pas très intéressantes ! Un peu plus utile : étant donné $x\in X$ fixé, on peut considérer la *mesure de Dirac* δ_x définie sur $\mathcal{P}(X)$ par :

$$\delta_x(A)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in A\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\ .$$

Sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, on peut aussi définir la *mesure de comptage* μ, en définissant :

$$\mu(A)=\begin{cases}\mathrm{card}(A) & \text{si A est fini}\\ +\infty & \text{sinon}\end{cases}\ .$$

Proposition 4.13. *Soit μ une mesure sur un ensemble X.*

1. *Si $A_0, \dots, A_n$ sont des parties deux à deux disjointes et mesurables, alors*

$$\mu(\bigcup_{i=0}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \ .$$

2. *Si $A \subseteq B$ et A et B sont mesurables alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

Preuve:

Pour voir que la première propriété est vraie, il suffit de définir $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ et d'appliquer la définition d'une mesure :

$$\mu(\bigcup_{i=0}^{n} A_i) = \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i) + \sum_{i=n+1}^{+\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i) + 0 = \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i) \ .$$

Pour la deuxième propriété on utilise le fait que $B = A \cup (B \setminus A)$ et que $B \setminus A$ est mesurable pour écrire :

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A) \ .$$

Attention : si $A \subseteq B$ et A et B sont mesurables, on a envie d'écrire $\mu(A) = \mu(B) - \mu(B \setminus A)$. Ceci peut ne pas avoir de sens, si $\mu(B \setminus A)$ est infini ! Avant d'écrire une telle égalité, il faut vérifier que $\mu(B \setminus A) < +\infty$.

Regroupons quelques propriétés utiles des mesures.

Proposition 4.14. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *Si $A, B \in \mathcal{A}$ et $A \subseteq B$ alors $\mu(B) \geq \mu(A)$ (on dit que μ est* croissante*).*
2. *Si $A, B \in \mathcal{A}$, on a toujours $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$; si $\mu(A \cap B) < +\infty$ alors on peut aussi écrire $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.*
3. *Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont telles que $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors on a*

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(A_i) \ .$$

4. *Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont telles que $A_i \in \mathcal{A}$ et $A_i \subseteq A_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$; alors*

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{i\to+\infty} \mu(A_i) \ .$$

5. *Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont telles que $A_i \in \mathcal{A}$ et $A_{i+1} \subseteq A_i$, et $\mu(A_0)$ est finie, alors*

$$\mu\left(\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{i\to+\infty} \mu(A_i) \ .$$

Attention, pour la dernière propriété, il faut supposer que A_0 (ou un des A_i) soit de mesure finie pour que le résultat soit vrai en général : par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue, considérons $A_i = [i, +\infty[$. Alors $\mu(A_i) = +\infty$ pour tout i, mais $\bigcap A_i = \emptyset$ et donc $\mu(\bigcap A_i) = 0$.

Preuve:

On a déjà démontré (1).

Pour démontrer (2), on commence par écrire que $A \cup B$ est la réunion disjointe de $A \setminus B$, $A \cap B$, et $B \setminus A$, pour obtenir

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) \\ &= \mu(A) + \mu(B \setminus A) \ . \end{aligned}$$

La deuxième égalité vient du fait que A est la réunion disjointe de $A \setminus B$ et $A \cap B$. En ajoutant $\mu(A \cap B)$, on obtient

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) \ .$$

Pour démontrer (3), on peut par exemple commencer par introduire, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$B_i = A_i \setminus \bigcup_{j<i} A_j \ .$$

Alors chaque B_i appartient à $\mathcal{A}$, les B_i sont deux à deux disjointes et leur réunion est égale à $\bigcup_i A_i$ (pourquoi ?) ; enfin, $B_i \subseteq A_i$ donc $\mu(B_i) \leq \mu(A_i)$ pour tout i. En utilisant la σ-additivité, on obtient :

$$\mu(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i) = \mu(\bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(A_i) \ .$$

Pour (4), on procède de la même façon, en introduisant les mêmes B_i que ci-dessus et en utilisant que, comme la suite (A_i) est croissante, on a pour tout k

$$A_k = \bigcup_{i=0}^{k} A_i = \bigcup_{i=0}^{k} B_i \ .$$

Mais alors on a aussi, pour tout k :

$$\mu(A_k) = \sum_{i=0}^{k} \mu(B_i) \ .$$

Et alors, quand k tend vers $+\infty$, on voit que $\mu(A_k)$ tend vers

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mu(B_i) = \mu\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) \ .$$

Enfin, pour montrer (5), on peut par exemple poser $C_i = A_0 \setminus A_i$, pour tout i ; alors $C_i \in \mathcal{A}$, la suite C_i est croissante, $\mu(C_i) = \mu(A_0) - \mu(A_i)$ pour tout i, et

$$\bigcup_{i=0}^{+\infty} C_i = A_0 \setminus \bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i \ .$$

De plus, le résultat précédent nous dit que

$$\lim_{i \to +\infty} \mu(C_i) = \mu(\bigcup_{i=0}^{+\infty} C_i) \ .$$

Autrement dit,

$$\lim_{i \to +\infty} (\mu(A_0) - \mu(A_i)) = \mu(A_0) - \mu(\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i) \ .$$

Étant donnée une mesure, on a à disposition une notion de « grosseur » : plus la mesure est grande, plus la partie est grosse. Si la mesure est nulle, alors la partie est même *négligeable* : du point de vue de la mesure, elle n'est pas différente de l'ensemble vide. Bien sûr, différentes mesures donnent lieu à différentes notions de grosseur : la mesure de Dirac δ_x pense qu'une partie est négligeable si elle ne contient pas x, et aussi grosse que l'espace entier si elle contient x ; la mesure de comptage prend en compte le nombre d'éléments d'un ensemble ; et la mesure de Lebesgue généralise la notion de longueur, d'une façon qu'il est parfois difficile de se représenter.

Définition 4.15. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est l'unique mesure définie sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$ et telle que

$$\lambda\left(\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \ .$$

On admettra à la fois qu'une telle mesure existe, et qu'elle est unique !

Proposition 4.16. *1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lambda(\{x\}) = 0$.*

2. Si (x_n) est une suite de nombres réels, alors $\lambda(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = 0$.

3. Pour tous réels a, b avec $a \leq b$ on a $\lambda([a,b]) = \lambda(]a,b[) = \lambda([a,b[) = \lambda(]a,b]) = b - a$.

Une idée fondamentale en théorie de la mesure est qu'on peut, la plupart du temps, *négliger* les parties de mesure nulle : elle n'ont pas d'influence sur la valeur d'une intégrale, par exemple.

Définition 4.17. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Une partie $A \subseteq X$ est dite *négligeable* si A est contenue dans ensemble de mesure nulle, c'est-à-dire s'il existe $B \in \mathcal{A}$ tel que $A \subseteq B$ et $\mu(B) = 0$.

Inversement, on dit que *presque tout x* appartient à A, ou encore que $x \in A$ est *vrai presque partout*, si $X \setminus A$ est négligeable, c'est-à-dire s'il existe $B \in \mathcal{A}$ tel que $B \subseteq A$ et $\mu(X \setminus B) = 0$.

Exercice 4.18. Montrer que $\mathbb{Q}$ est négligeable dans $\mathbb{R}$.

4.3 Fonctions mesurables

Définition 4.19. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est *mesurable* si, pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$.

Plus généralement, si $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ sont des espaces mesurables, on dit que $f : X \to Y$ est mesurable si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}$.

Exercice 4.20. Montrer que, si $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.

Montrer qu'on obtient encore la même définition en demandant simplement que $f^{-1}(I) \in \mathcal{A}$ pour tout intervalle ouvert I.

Exercice 4.21. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et f la fonction caractéristique d'une partie $A \in \mathcal{A}$, vue comme une fonction de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est mesurable.

Un cas particulier est spécialement important : celui où f est une fonction de $\mathbb{R}^n$, muni de sa tribu borélienne, dans $\mathbb{R}$, muni de sa tribu borélienne.

Définition 4.22. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. On dit que f est *borélienne* si f est mesurable de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ dans $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$.

Rappelons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue si, et seulement si, $f^{-1}(O)$ est ouvert pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$. Par conséquent, *toute fonction continue est borélienne* ; la réciproque n'est pas vraie : la fonction caractéristique de $[0, 1]$ (ou de n'importe quelle autre borélien) est borélienne, mais pas du tout continue.

Une bonne raison de s'autoriser à considérer ces fonctions plus générales est qu'on est souvent confronté à des limites simples de suites de fonctions, qui en général ne sont pas continues...

Proposition 4.23. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que $(f_n(x))$ converge pour tout $x \in X$, vers un réel que l'on note $f(x)$. Alors f est mesurable.*

Démonstration. Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert. Si $f(x) \in I$, alors $f_n(x)$ appartient à I pour tout n assez grand, par définition de la limite. Réciproquement, si $f_n(x) \in I$ pour tout n suffisamment grand, alors $f(x) \in [a, b]$. Ainsi, on voit que $f(x) \in I$ si, et seulement si, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f_n(x) \in]a + \varepsilon, b - \varepsilon[$ pour tout n suffisamment grand ; menant à l'égalité suivante :

$$f^{-1}(]a, b[) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} \left\{ x : f_m(x) \in \left]a + \frac{1}{N}, b - \frac{1}{N}\right[\right\} .$$

Chacun des ensembles $\{x : f_m(x) \in \left]a + \frac{1}{N}, b - \frac{1}{N}\right[\}$ appartient à $\mathcal{A}$ puisque f_m est mesurable ; une intersection d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ est encore un élément de $\mathcal{A}$, et de même pour une réunion, ce qui nous donne la conclusion souhaitée. ☐

Proposition 4.24. *Soit $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ et $(Z, \mathcal{C})$ trois espaces mesurables. Supposons que $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont mesurables. Alors $g \circ f$ est mesurable.*

Preuve:

Soit $C \in \mathcal{C}$. Alors

$$(g \circ f)^{-1}(C) = \{x \in X : g(f(x)) \in C\} = \{x \in X : f(x) \in g^{-1}(C)\} = f^{-1}(g^{-1}(C)) \ .$$

Puisque g est mesurable, $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$; et alors le fait que f est mesurable nous donne que $f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{A}$. On vient de montrer que $(g \circ f)^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ pour tout $C \in \mathcal{C}$, autrement dit que $g \circ f$ est mesurable.

Exercice 4.25. Montrer que l'addition $(x, y) \mapsto x + y$ et la multiplication $(x, y) \mapsto xy$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont boréliennes.

Exercice 4.26. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et f, g deux fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f + g$ et fg sont mesurables.

Rappelons que, si $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions boréliennes, on dit que f et g sont égales *presque partout* si $\lambda(\{x \colon f(x) \neq g(x)\}) = 0$ (c'est-à-dire, si l'ensemble de tous les x tels que $f(x) \neq g(x)$ est négligeable, ou encore si $f(x) = g(x)$ pour presque tout x)

Exemple. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \not\in \mathbb{N} \\ x & \text{sinon} \end{cases}$ est borélienne et nulle presque partout.

Dans le prochain chapitre, il sera utile pour nous d'autoriser certaines fonctions à prendre la valeur $+\infty$.

Définition 4.27. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une *fonction mesurable à valeurs positives* est une fonction $f \colon X \to [0, +\infty]$ telle que :

— $f^{-1}(\{+\infty\})$ soit mesurable, et

— Pour tout borélien B de $[0, +\infty[$, $f^{-1}(B)$ soit mesurable.