

Chapitre 8

Introduction aux espaces L^p

Dans ce chapitre, (X, \mathcal{A}, μ) désignera un espace mesuré; on va travailler en identifiant les fonctions si elles coïncident μ -presque partout. Autrement dit, on écrira $f = g$ quand $\mu(\{x: f(x) \neq g(x)\}) = 0$; en particulier, $f = 0$ signifiera que f vaut 0 presque partout. Par exemple, si f est la fonction caractéristique de \mathbb{Q} , on pourra écrire $f = 0$.

8.1 L'espace L^∞

Définition 8.1. Soit $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On dit que $M \in [0, +\infty]$ est un *majorant essentiel* de f si $\mu(\{x: f(x) > M\}) = 0$, autrement dit, si $f \leq M$ presque partout.

On définit $\|f\|_\infty$ comme le plus petit majorant essentiel de $|f|$.

Définition 8.2. L'espace $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, qu'on notera simplement $L^\infty(X)$ quand il n'y a pas de risque de confusion, est l'espace vectoriel formé par toutes les fonctions f telles que $\|f\|_\infty < +\infty$ ¹.

Proposition 8.3. $(L^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace normé.

Démonstration. Commençons par vérifier l'axiome de séparation: $\|f\|_\infty = 0$ est équivalent à dire que $\mu(\{x: |f(x)| > 0\}) = 0$, autrement dit que $f = 0$ (presque partout).

Ensuite, notons que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors M est un majorant essentiel de $f \in L^\infty(X)$ si et seulement si $|\lambda|M$ est un majorant essentiel de λf . Il suit que $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$.

Enfin, vérifions l'inégalité triangulaire: soit $f, g \in L^\infty(X)$. Alors on a

$$\mu(\{x: |f(x)| > \|f\|_\infty \text{ ou } |g(x)| > \|g\|_\infty\}) = 0$$

puisque cet ensemble est la réunion de deux ensembles de mesure nulle. Par conséquent, μ -presque partout on a $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ et $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$, donc aussi $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. On vient de montrer que $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant essentiel de $f + g$, ce qui revient à dire que $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. \square

Proposition 8.4. *L'inégalité de Hölder reste vraie pour les exposants conjugués $1, +\infty$: si f, g sont mesurables, $\|f\|_1 < +\infty$ et $\|g\|_\infty < +\infty$, alors fg est intégrable et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.*

Démonstration. Il suffit de noter que, μ -presque partout, on a $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$, et donc $|f(x)g(x)| \leq |f(x)|\|g\|_\infty$. En intégrant cette inégalité, on obtient bien

$$\|fg\|_1 = \int_X |f(x)g(x)| d\mu \leq \int_X |f(x)| \|g\|_\infty d\mu = \|f\|_1 \|g\|_\infty .$$

\square

¹. Répétons pour la dernière fois que deux fonctions sont identifiées si elles coïncident presque partout; notons que si $f = g$ presque partout alors $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$.

8.2 Les espaces L^p

Définition 8.5. Soit $p \in [1, +\infty[$. L'espace $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, noté $L^p(X)$ quand il n'y a pas de risque de confusion, est l'espace vectoriel formé par les fonctions f telles que $\|f\|_p < +\infty$.

On voudrait montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p(X)$; l'axiome de séparation n'est pas difficile à montrer: on a bien $\|0\|_p = 0$; et réciproquement, si $\|f\|_p = 0$ alors $\int_X |f(x)|^p d\mu = 0$, ce qui n'est possible (comme $|f(x)|^p \geq 0$ pour tout x) que si $|f(x)|^p = 0$ μ -presque partout, c'est-à-dire si $f = 0$ (presque partout).

L'axiome d'homogénéité se vérifie également très facilement: pour $f \in L^p(X)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\lambda f\|_p = \left(\int_X |\lambda f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p .$$

L'inégalité triangulaire est plus difficile à établir.

Théorème 8.6 (Inégalité de Minkowski). Soit $p \in [1, +\infty[$ et $f, g \in L^p(X)$. Alors $f + g \in L^p(X)$ et $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Démonstration. On a déjà traité le cas $p = +\infty$, et le cas $p = 1$ est simplement l'inégalité triangulaire habituelle. Supposons donc $p \in]1, +\infty[$ et $f, g \in L^p(X)$.

Commençons par montrer que $\|f + g\|_p < +\infty$. Comme $x \mapsto x^p$ est convexe et croissante, on a pour tout x que

$$\left(\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x) \right)^p \leq \left(\frac{1}{2}f(x) \right)^p + \left(\frac{1}{2}g(x) \right)^p \leq \frac{1}{2}|f(x)|^p + \frac{1}{2}|g(x)|^p .$$

En intégrant cette inégalité, on obtient que

$$\frac{1}{2^p} \|f + g\|_p^p \leq \frac{1}{2} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) .$$

Ceci nous prouve que $\|f + g\|_p < +\infty$.

Maintenant, notons $q = \frac{p}{p-1}$ l'exposant conjugué de p . Ci-dessous, on va utiliser l'inégalité de Hölder, et le fait que

$$\| |f + g|^{p-1} \|_q = \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}} = \|f + g\|_p^{p-1} .$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_X |f + g|^p d\mu \\ &\leq \int_X (|f| + |g|) |f + g|^{p-1} d\mu \\ &= \int_X |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \|f\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \| |f + g|^{p-1} \|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

Si jamais $\|f + g\|_p = 0$ on n'a rien à démontrer; sinon, en divisant des deux côtés par $\|f + g\|_p^{p-1}$ on obtient finalement $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. \square

Il y aurait beaucoup de choses à dire sur les espaces L^p ; en particulier, étudier la convergence de suites dans les espaces L^p et ses relations avec d'autres modes de convergence (en proba, convergence simple) est un sujet riche et important. Dans la fin de ce chapitre, on va supposer que (X, \mathcal{A}, μ) est un espace de probabilité (pour se simplifier la vie), justifier le choix de la notation $\|f\|_\infty$ et voir que la convergence L^p entraîne la convergence en probabilité.

Proposition 8.7. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace de probabilité et $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Alors on a

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p .$$

Démonstration. Commençons par remarquer que l'on a toujours

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq (\|f\|_\infty^p \mu(X))^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty .$$

Par conséquent, si $\|f\|_p \rightarrow +\infty$ quand $p \rightarrow +\infty$ alors $\|f\|_\infty = +\infty$. Pour voir la réciproque, notons que pour $t < \|f\|_\infty$ fixé, l'ensemble $A_t = \{x: |f(x)| > t\}$ est de mesure strictement positive, par conséquent

$$\|f\|_p \geq (t^p \mu(A_t))^{\frac{1}{p}} = t \mu(A_t)^{\frac{1}{p}} \rightarrow t \text{ quand } p \rightarrow +\infty .$$

Ceci montre que si $\|f\|_\infty = +\infty$ alors $\|f\|_p$ tend vers $+\infty$; mais aussi que, si $\|f\|_\infty < +\infty$ on a pour tout $\varepsilon > 0$ que pour p suffisamment grand $\|f\|_\infty - \varepsilon \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$. \square

Définition 8.8. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace de probabilité. Une *variable aléatoire* est une fonction mesurable $f: X \rightarrow [0, +\infty]$.

Remarque 8.9. Ici nos notations sont différentes de celles qui sont communément utilisées en probabilités : souvent la variable aléatoire est notée X , l'espace de départ Ω , et la mesure de probabilité \mathbb{P} . Cela ne jouera pas vraiment de rôle ici donc on garde les notations utilisées précédemment dans le cours.

Définition 8.10. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace de probabilité, et (f_n) une suite de variables aléatoires. On dit que f_n converge en probabilité vers une variable aléatoire f si, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0 .$$

Théorème 8.11. Soit $p \in [1, +\infty]$, (X, \mathcal{A}, μ) un espace de probabilité, et (f_n) une suite de variables aléatoires telles que $f_n \in L^p(X)$ pour tout n et la suite (f_n) converge vers f dans $L^p(X, \mu)$. Alors (f_n) converge vers f en probabilité.

Démonstration. Si $p = +\infty$ le résultat est immédiat puisque quel que soit $\varepsilon > 0$, pour n suffisamment grand on a $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ et donc $\mu(\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$.

Supposons donc $p < +\infty$, fixons $\varepsilon > 0$ et considérons l'ensemble $A_n = \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Sur A_n , on a $|f_n - f|^p \geq \varepsilon^p$, et donc

$$\varepsilon^p \mu(A_n) \leq \int_X |f_n - f|^p d\mu .$$

Autrement dit, $\mu(A_n) \leq \frac{\|f_n - f\|_p^p}{\varepsilon^p}$, et le terme de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ puisque $\|f_n - f\|_p$ tend vers 0. \square

On pourrait aussi se demander quel est le rapport entre convergence L^p et convergence presque sûre. Le résultat suivant est une conséquence facile du théorème de convergence dominée, et la preuve est laissée en exercice.

Proposition 8.12. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$, et (f_n) une suite de fonctions dans $L^p(X)$ telles que $f_n(x)$ converge simplement vers une limite $f(x)$ (presque partout), et supposons qu'il existe une fonction $g \in L^p(X)$ telle que pour tout n on ait $|f_n(x)| \leq g(x)$ presque partout. Alors $f \in L^p(X)$ et $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ quand p tend vers $+\infty$.

Réciproquement, on a le résultat suivant, qu'on se contente de mentionner ici sans démonstration.

Théorème 8.13. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$, et (f_n) une suite d'éléments de $L^p(X)$ qui converge vers f dans $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$. Alors il existe une suite extraite (f_{n_k}) telle que $(f_{n_k}(x))$ tend vers $f(x)$ presque partout.

Exercice 8.14. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, et (f_n) une suite d'éléments de $L^\infty(X)$ qui converge vers f dans $(L^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$. Montrer que $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$ presque partout. Montrer que la réciproque est fautive.