2016/2017 | Semestre d'automne - L3 MathEco
Université Lyon I | Topologie et Théorie de la mesure

Interrogation IV

Durée 30mn

Question de cours.

1. Énoncer l'inégalité des pentes (pour une fonction convexe $f\colon I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$).
2. Énoncer l'inégalité de Minkowski.

Exercice.

1. Montrer que $x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
   Dans la suite on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $y_1, \ldots, y_n$ des réels strictement positifs. A l'aide du résultat de la question précédente, démontrer que

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{k=1}^{n} (1+y_k)^{\frac{1}{n}} \ .$$

   (On pourra par exemple écrire $y_k = e^{x_k}$ et essayer d'utiliser l'inégalité de Jensen)
3. En déduire que, dès que $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ sont des réels strictement positifs, on a l'inégalité

$$\left(\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k)\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}}$$