

## Feuille d'exercices IX.

Fonctions convexes

**Exercice 1.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Montrer que  $f$  est convexe si et seulement si pour tout  $a < b \in I$  et tout  $x \in [a, b]$  on a  $f(x) \leq f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$ .

En déduire une preuve de l'inégalité des pentes.

**Exercice 2.** Montrer les inégalités suivantes, à l'aide de raisonnements de convexité :

1.  $\forall x \in \mathbb{R} \ e^x \geq 1 + x$ .
2.  $\forall x > 0 \ \ln(x) \leq x - 1$ .
3.  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \ \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$ .
4.  $\forall x > -1 \ \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$ .

**Exercice 3.** Montrer que la fonction  $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 4.** 1. Montrer que la fonction  $x \mapsto e^{2x - \cos(x)}$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $f: I \rightarrow ]0, +\infty[$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Montrer que si  $\ln(f)$  est convexe alors  $f$  est convexe. Réciproque?
3. Application : Montrer que  $x \mapsto (1+x)^x$  est convexe sur  $] -1, +\infty[$ .

**Exercice 5.** Soit  $f, g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $f$  est convexe et  $g$  est convexe et croissante. Montrer que  $g \circ f$  est convexe.

**Exercice 6.** Montrer que si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$  alors  $f$  est à valeurs positives (on pourra commencer par justifier le fait que  $f$  est décroissante).

**Exercice 7.** Montrer que si  $f$  est une fonction convexe définie sur un intervalle ouvert et à valeurs réelles, et  $a$  est un minimum local de  $f$ , alors  $a$  est un minimum global.

**Exercice 8.** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe.

1. Montrer que si  $f$  est à valeurs négatives alors  $f$  est constante.
2. Montrer que s'il existe  $a, b$  tels que  $f(x) \leq ax + b$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  alors  $f$  est une fonction affine.

**Exercice 9.** Montrer que le sup de deux fonctions convexes est convexe (on pourra penser à utiliser la caractérisation de la convexité par l'épigraphe).

**Exercice 10.** Soit  $f$  une fonction de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ , majorée, de classe  $C^2$ . On suppose qu'il existe  $a > 0$  tel que

$$\forall x \geq 0 \ f''(x) \geq af(x) \geq 0 .$$

1. Montrer que  $f$  est décroissante.
2. Déterminer la limite de  $f'(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

3. Montrer que  $f(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

4. Montrer que pour tout  $x \geq 0$  on a  $f(x) \leq f(0)e^{-x\sqrt{a}}$ .

**Exercice 11.** Soit  $a, b, c, d$  des réels strictement positifs tels que  $a + b + c + d = 1$ . Montrer que

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}.$$

Indication : utiliser l'identité  $\frac{x^2}{x+y} = x \frac{1}{1+\frac{y}{x}}$  et utiliser (après l'avoir justifiée...) la convexité de  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ .

**Exercice 12.** Soit  $ABC$  un triangle dans le plan, d'angles  $a, b, c$ . Montrer qu'on a les inégalités suivantes :

1.  $\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

2.  $\cos(a) + \cos(b) + \cos(c) \leq \frac{3}{2}$ .

Indication : combien vaut  $a + b + c$ ? Pour la deuxième inégalité, on pourra supposer  $a \geq b \geq c$  et distinguer les cas  $a \leq \frac{\pi}{2}$  et  $a > \frac{\pi}{2}$ .