Feuille d'exercices VI.

Intégrales à paramètres

Exercice 1.

1. Soit $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(2xt)e^{-t^2}\,dt$, pour $x \in \mathbb{R}$. Prouver que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Chercher une relation simple entre I et I'.
3. En déduire la valeur de $I(x)$ pour tout réel x $\left(\text{on admet que } I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

Exercice 2. Pour $x \geq 0$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-x/t}\,dt$.

Montrer que φ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et que $\varphi''(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$ pour $x > 0$.

Exercice 3. Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \exp(-t^2)\,dt\right)^2$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\,dt$.

1. (a) Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Calculer $F'(x) + G'(x)$ pour $x \geq 0$.
2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \exp(-t^2)\,dt$ puis de $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2/2)\,dt$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 e^{-tx}\,dx$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer f'' et les limites en $+\infty$ de f et f'.
3. En déduire une expression simple de f.
4. Donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ (pour la deuxième intégrale, on pourra penser à utiliser la relation $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ et une intégration par parties).

Exercice 5.

1. On fixe un réel x. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^x \ln(t)}\,dt$ converge si et seulement si $x > 2$. Dans la suite de l'exercice, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^x \ln(t)}\,dt$.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]2, +\infty[$ et donner une formule pour la dérivée de F qui ne fasse pas intervenir d'intégrale.
3. Déterminer la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Donner une formule exprimant la valeur de $F(x)$ pour tout $x > 2$ et ne faisant pas intervenir d'intégrale.

Exercice 6. On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}\,dx$ pour $\alpha \geq 0$.

1. Montrer que $0 \leq I(\alpha) < +\infty$ pour tout $\alpha \geq 0$.
2. Montrer que la fonction $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $I'(\alpha)$, pour $\alpha > 0$, sous la forme d'une intégrale.
3. Montrer que I est continue en 0.
4. (a) Soit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples.
   (b) En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.
   (c) Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geq 0$.

Exercice 7. On pose pour $x \geq 0$: $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,dt$. Montrer que la fonction f est bien définie et dérivable sur $[0, +\infty[$.
Calculer explicitement f' et en déduire f (on calculera $f(0)$ à l'aide du changement de variable $u = 1/t$).

Exercice 8. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2(1+t^2)}\,dt$.

1. Montrer que F et G sont continues sur $\mathbb{R}$. Calculer $F(0)$ et $G(0)$.
2. Etablir l'égalité valable pour tout réel x :

$$F(0) - F(x) + G(x) = C|x|, \text{ où } C = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt.$$

3a. Montrer que G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifie $G''(x) = F(x)$ pour tout réel x.

3b. En utilisant la question 2, en déduire que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie une équation différentielle du second ordre.

3c. En déduire l'expression de $F(x)$ pour $x > 0$ (on pourra remarquer qur la fonction F est bornée sur $\mathbb{R}$). Calculer enfin $F(x)$ pour tout réel x.

4. Déduire de tout cela la valeur de la constante C.