

Feuille d'exercices V.
 Intégration, Théorèmes de convergence

Exercice 1. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. On suppose que f est une fonction mesurable sur X à valeurs strictement positives.

Montrer que, pour toute suite (A_n) de parties dans \mathcal{A} , si $\int_{A_n} f d\mu$ converge vers 0 alors $(\mu(A_n))$ converge vers 0 (on pourra utiliser le fait que pour tout $p > 0$ on a $A_n \subseteq \{x \in X : f(x) < \frac{1}{p}\} \cup \{x \in A_n : f(x) \geq \frac{1}{p}\}$).

Exercice 2. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, et $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction intégrable sur X .

- Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \{x \in X : f(x) \geq n\}$. Montrer que la suite $\int_X f \mathbf{1}_{X_n} d\mu$ converge vers 0.
- Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A f d\mu < \varepsilon.$$

(On pourra commencer par traiter le cas où f est bornée)

Exercice 3. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs réelles, et f une fonction mesurable à valeurs réelles. On dit que (f_n) converge vers f en mesure si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- Montrer que si $\int_X |f_n - f| d\mu$ tend vers 0 alors (f_n) converge vers f en mesure. Remarquer que la réciproque est fautive.
- Montrer que si (f_n) converge vers f presque sûrement alors (f_n) converge vers f en mesure. Remarquer que la réciproque est fautive.
- On suppose que (f_n) converge vers f en mesure, et qu'il existe une fonction $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f_n| \leq g$ presque partout pour tout $n \geq 1$.
 - Montrer que $|f| \leq g$ presque partout.
 - En déduire que $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ (on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent).

Exercice 4. 1. Montrer que $\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x) \right) dx = \ln(2)$.

2. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 5. 1. Pour $t \in]0, +\infty[$, on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}$. Calculer $f(t)$.

2. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

Exercice 6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n} \right)^{-1} dx < +\infty$. En fonction de la valeur de α , déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n} \right)^{-1} dx.$$

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty[$ par $f_n(x) = (n+1)x^n$.

- Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $\left(\int_0^1 f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Commenter ce résultat.

Exercice 8. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{(\sin \pi x)^n}{1+x^2}$. Montrer que chaque fonction f_n est intégrable sur \mathbb{R} . Vérifier que la suite $\left(\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \right)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite et déterminer cette limite.

Exercice 9. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n} dt$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{|x|}{n}\right) dx$.

Exercice 10. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$.

Exercice 11. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} (\sin(x))^n dx$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3} dx$.

Exercice 12. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty[$ par $f_n(x) = n(1-x)^n \sin^2(nx)$.

- Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On notera cette limite simple f .
- Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \sin^2(x) dx.$$

- Vérifier que pour tout $t \geq 0$, on a $1 - t \leq e^{-t}$.
- En déduire que la suite $\left(\int_0^1 f_n(x) dx\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 f(x) dx.$$

- Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

Exercice 13. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x , on pose $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

- Montrer que pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est convergente et calculer sa somme $f(x)$.
- Comparer $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$. Expliquer.

Exercice 14. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions positives intégrables sur \mathbb{R} convergente vers 0 presque partout.

- Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n$ converge presque partout vers une fonction positive f intégrable sur \mathbb{R} .
- Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n \right) d\lambda.$$

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

- Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente.
- Soit $k \geq 0$. Montrer que

$$\int_{\pi/6+2k\pi}^{5\pi/6+2k\pi} \frac{\sin t}{t} dt \geq \frac{1}{3(2k+1)}.$$

- En déduire que f n'est pas intégrable sur \mathbb{R} (au sens de Lebesgue).
- Une autre méthode pour montrer que f n'est pas intégrable au sens de Lebesgue :
 - Par la même méthode que ci-dessus, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ est semi-convergente.
 - Montrer que, pour tout $t > 0$, on a

$$\left| \frac{\sin(t)}{t} \right| \geq \frac{\sin^2(t)}{t} = \frac{1 - \cos(2t)}{2t}.$$

- En déduire que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ (au sens de Lebesgue).

Exercice 16. Soit $E = \mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et de la mesure de comptage μ . On rappelle que μ est définie par $\mu(A) = \text{Card}(A)$ si A est fini, $\mu(A) = +\infty$ sinon. On se donne une application $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

- Vérifier que u est mesurable de (E, \mathcal{A}) dans $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$.
- Soit, pour $k \in \mathbb{N}$, l'application $u_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$u_k(n) = \begin{cases} u(n) & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{si } k < n. \end{cases}$$

Montrer que (u_k) est une suite de fonctions étagées croissant vers u .

- Calculer $\int_{\mathbb{N}} u_k d\mu$, en déduire $\int_{\mathbb{N}} u d\mu$.
- Soit $(v_{k,n})_{k,n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, le terme $v_{k,n}$ soit positif et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(v_{k,n})$ croisse vers v_n . Montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} v_{k,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

- En déduire que, si une suite $(w_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ est telle que $w_{n,m}$ soit positif pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ alors on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} w_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} w_{n,m}$$

(C'est-à-dire qu'on peut sommer d'abord par rapport à m puis par rapport à n , ou bien d'abord par rapport à n puis par rapport à m , et obtenir le même résultat dans les deux cas)