Feuille d'exercices III.

Espaces métriques compacts.

Exercice 1. Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^4 = 1\} \ , \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + xy + y^2 \leq 1\} \ ,$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 = x(1 - 2x)\} \ .$$

Exercice 2. Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé. On suppose que A est contenue dans la boule unité ouverte $B(0, 1)$. Montrer qu'il existe $r < 1$ tel que A soit contenu dans $\overline{B}(0, r)$.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique, et (x_n) une suite d'éléments de X qui converge vers $x \in X$. Montrer que l'ensemble $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique, et (x_n) une suite d'éléments de X. On dit que $\alpha \in X$ est une *valeur d'adhérence* de (x_n) s'il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers α.
Montrer que, si (X, d) est compact, alors (x_n) converge vers α si, et seulement si, α est la seule valeur d'adhérence de (x_n). Ce résultat demeure-t-il vrai si l'on ne suppose plus X compact ?

Exercice 5. Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle que $\|f(x)\| \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Exercice 6. Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ (pour une distance induite par une norme $\| \cdot \|$ sur $\mathbb{R}^n$). Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on définit

$$d(x, F) = \inf\{d(x, y) \colon y \in F\} \ .$$

1. Montrer que $x \mapsto d(x, F)$ est une fonction continue.
2. Montrer que $d(x, F) = 0$ si et seulement si x appartient à F.
3. Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que

$$d(x, y) = \inf\{d(a, b) \colon a \in K, b \in F\} \ .$$

Ce résultat est-il encore vrai si l'on suppose simplement K fermé ?

Exercice 7. Étant données A, B deux parties de $\mathbb{R}^n$, on définit leur somme $A + B$ par

$$A + B = \{a + b \colon a \in A, b \in B\} \ .$$

1. Montrer que si A et B sont compacts alors $A + B$ est compact.
2. Montrer que si A est compact et B est fermé alors $A + B$ est fermé.

3. Donner un exemple de deux fermés de $\mathbb{R}^n$ dont la somme n'est pas fermée.

Exercice 8. Soit (X, d) un espace métrique, et (K_n) une suite de compacts non vides de X tels que $K_{n+1} \subseteq K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $K = \bigcap_n K_n$.

1. Montrer que K est compact et non vide.
2. Soit U un ouvert tel que $K \subseteq U$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K_i \subseteq U$ pour tout $i \geq n$.

Exercice 9. Soit (X, d) un espace métrique compact, et $f : X \to X$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in X \ x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y) \ .$$

Montrer qu'il existe $a \in X$ tel que $f(a) = a$ (indication : on pourra considérer, après avoir justifié son existence, a tel que $d(a, f(a)) = \min\{d(x, f(x)) : x \in X\}$).
Ce résultat reste-t-il vrai si l'on suppose seulement que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ pour tout x, y ?