Université Claude Bernard Lyon 1
Mesure et intégration

Licence de mathématiques 3e année
Année 2016-2017

Contrôle écrit n° 2

6 décembre 2016 – corrigé

Question de cours

1. On fixe $t > 0$ et on note $B = \{x \in X,\ f(x) > t\}$. Comme $B = f^{-1}\big(]t, +\infty]\big)$, c'est un élément de $\mathscr{T}$.
   Pour tout $x \in B$, on a : $t < f(x)$ donc pour tout $x \in X$, on a : $t\mathbf{1}_B(x) < f(x)\mathbf{1}_B(x)$. Par intégration, il vient :
   $$t\,\mu(B) = \int_X t\mathbf{1}_B \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f\mathbf{1}_B \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f \mathrm{d}\mu,$$
   d'où résulte l'inégalité de Markov.
2. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ pour μ-presque tout x de X et qu'il existe $g : X \to [0, +\infty]$ intégrable telle que $\big|f_n(x)\big| \leqslant g(x)$ pour μ-presque tout x de X. Alors $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu$.

Exercice

1. On a $f_n = g_n\, \chi_{[0,n]}$, avec $g_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto g_n(x) = (1 + x/n)^n \mathrm{e}^{-2x}$ continue, donc mesurable. Le segment $[0, n]$ étant mesurable, la fonction indicatrice $\chi_{[0,n]}$ est mesurable. Donc f_n l'est aussi comme produit de fonctions mesurables. De plus la fonction continue g_n est bornée par un réel M sur le segment $[0, n]$. Donc, comme f est nulle hors de $[0, n]$, on a : $\int_{\mathbb{R}^+} |f|\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^n f\mathrm{d}\lambda \leqslant Mn < +\infty$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}^+$ fixé, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $f_n(x) = (1 + x/n)^n \mathrm{e}^{-2x}$ (il suffit de prendre $n_0 = \lfloor x \rfloor + 1$). Or on a, lorsque n tend vers l'infini :
   $$\ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = n\left(\frac{x}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right) = x + o(1),$$
   d'où, par continuité de l'exponentielle : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-x}$.
3. La fonction $h : u \mapsto \ln(1 + u)$ est convexe ($h''(u) = -1/(1 + u)^2 < 0$ pour $u > -1$) donc sa courbe est située en-dessous de sa tangente en 0 : ceci entraîne $\ln(1 + u) \leqslant u$ pour tout $u > -1$. Pour $u = x/n$, cela donne
   $$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leqslant \frac{x}{n},$$
   d'où par croissance de l'exponentielle : $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) \leqslant \mathrm{e}^x$.
4. Il vient, si $x \in [0, n]$: $f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$. Pour $x \in]n, +\infty[$, cette inégalité est encore satisfaite puisqu'alors $f_n(x) = 0$. Par suite, la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ domine la suite (f_n). Or elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. D'après la question 2 et le théorème de convergence dominée, on a donc :
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^+} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1.$$

Remarque. On aurait aussi pu montrer que la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ croît vers $g(x)$ pour tout x et appliquer le théorème de convergence monotone. Voici quelques graphes pour visualiser la situation (figure 1).

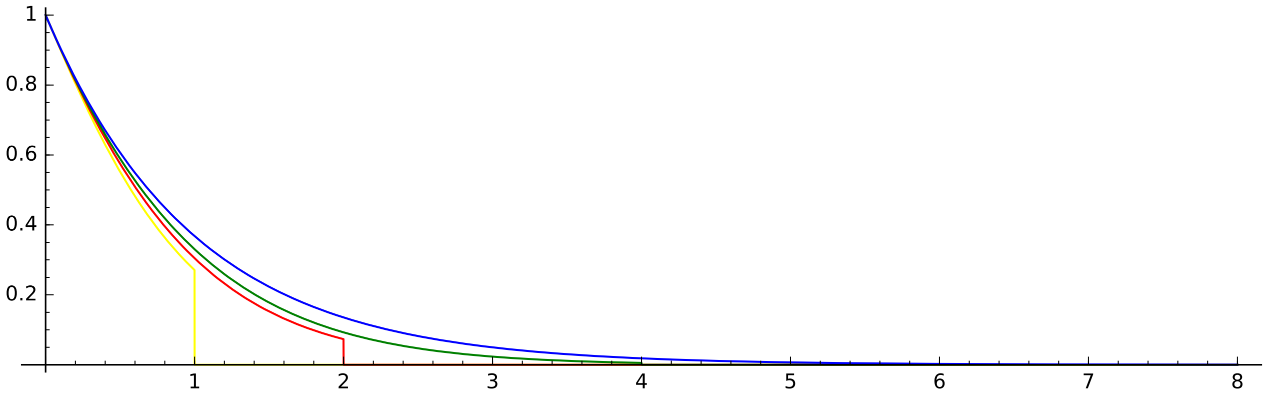

FIGURE 1 – f_1, f_2, f_4, g

Problème

1. (a) *Avec l'indication*, on calcule :

$$\left|1 - re^{it}\right|^2 = (1 - r\cos t + ir\sin t)(1 - r\cos t - ir\sin t) = (1 - r\cos t)^2 + \sin^2 t = h(r,t).$$

Par suite, $h(r,t) = 0$ SSI $1 = re^{it}$ SSI $r = 1$ et $t = 0$.

Sans l'indication, on peut aussi mettre sous forme presque canonique, pour tout $(r,t) \in [0,1] \times [-\pi, \pi]$:

$$h(r,t) = 1 - 2r\cos t + r^2 = (1 - r\cos t)^2 - r^2\cos^2 t + r^2 = (1 - r\cos t)^2 + r^2\sin^2 t,$$

quantité positive qui s'annule SSI $r\cos t = 1$ et $\sin t = 0$, *i.e.* si $r = 1$ et $t = 0$.
NB : On peut alors continuer la factorisation et remarquer que

$$h(r,t) = (1 - r\cos t + ir\sin t)(1 - r\cos t - ir\sin t) = \left|1 - re^{it}\right|^2.$$

(b) Si $r < 1$, la fonction $t \mapsto f(r,t)$ est continue donc mesurable. Si $r = 1$, la fonction $t \mapsto f(1,t)$ est continue donc mesurable sur $[-\pi, 0[\cup]0, \pi]$ et trivialement mesurable sur le singleton $\{0\}$ donc, par recollement, elle est mesurable sur $[-\pi, \pi]$.

(c) Si $r = 1$, il n'y a rien à démontrer ($1/r = r$). On a, si[1] $r \in]0,1[$ et $t \in [-\pi, \pi]$:

$$f\left(\frac{1}{r}, t\right) = \ln\left(1 - \frac{2\cos t}{r} + \frac{1}{r^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{r^2}(r^2 - 2r\cos t + 1)\right) = -2\ln r + f(r,t).$$

Comme $[-\pi, \pi]$ est de mesure finie, la fonction constante $t \mapsto -2\ln r$ est intégrable donc $t \mapsto f(1/r, t)$ l'est aussi. Il vient (on vérifie que l'égalité est vraie pour $r = 1$) :

$$F\left(\frac{1}{r}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} -2\ln(r)\,\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} f(r,t)\,\mathrm{d}t = -4\pi\ln r + F(r).$$

2. (a) Soit $(r,t) \in [0,1] \times [-\pi, \pi]$, on a d'abord :

$$h(r,t) \leqslant 1 + 2r\left|\cos t\right| + r^2 \leqslant 1 + 2 + 1 = 4.$$

D'autre part, à t fixé, le minimum du polynôme du second degré $r \mapsto h(r,t)$ est atteint en $r = 2\cos(t)/2$, d'où :

$$h(r,t) \geqslant h(\cos t, t) = 1 - 2\cos^2 t + \cos^2 t = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t.$$

Par suite, si $t \neq 0$, on a :

$$\left|f(r,t)\right| \leqslant \max\left(\left|\ln\sin^2 t\right|, \ln 4\right) \leqslant \left|\ln\sin^2 t\right| + \ln 4 = -\ln\sin^2 t + 4.$$

1. On écarte la valeur $r = 1$ pour éviter d'écrire le logarithme de 0.

(b) Au voisinage de 0, on a : $\sin t \sim t$, d'où $\sin^2 t = t^2\big(1+o(t)\big)$. On en déduit : $\ln(\sin^2 t) = 2\ln t + \ln\big(1+o(t)\big) = 2\ln t + o(t)$. Autrement dit, $g(t) \sim 2\ln t$.
Lorsque t tend vers π, on a : $g(t) = g(\pi - t) = 2\ln(\pi - t) + o(\pi - t)$.
La fonction g est continue donc intégrable sur tout segment de $]0,\pi[$.
Comme $\int_0^1 |\ln t|\,\mathrm{d}t < +\infty$ (puisque $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 |\ln t|\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [-t\ln t + t]_\varepsilon^1 = 1$) et que $\int_1^\pi |\ln(\pi - t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi-1} |\ln u|\,\mathrm{d}u < +\infty$, les équivalents précédents montrent l'intégrabilité de g sur $]0,1]$ et sur $[1,\pi[$.

(c) Soit $r \in [0,1]$. Par composition, la fonction $t \mapsto f(r,t)$ est continue sur $[-\pi,\pi]$ sauf peut-être en $t=0$ (si $r=1$), donc elle est mesurable. Pour tout $(r,t) \in [0,1]\times[-\pi,\pi]$, $t \neq 0$, on a : $|f(r,t)| \leqslant g\big(|t|\big) + \ln 4$. Comme g est intégrable, $t \mapsto g\big(|t|\big)$ l'est aussi ; par ailleurs, la fonction constante $\ln 4$ est intégrable sur le segment $[-\pi,\pi]$. On peut donc appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre : il implique que $t \mapsto f(r,t)$ est intégrable, c'est-à-dire que F est bien définie, et que F est continue sur $[0,1]$.

3. (a) Pour $a \in [0,1[$ et $(r,t) \in [0,a]\times[-\pi,\pi]$, on a :

$$h(r,t) = 1 - 2r\cos t + r^2 \geqslant 1 - 2r + r^2 = (1-r)^2 \geqslant (1-a)^2.$$

(b) Soit $a \in [0,1[$. Pour $t \in [-\pi,\pi]$, la fonction $[0,a[\to \mathbb{R}$, $r \mapsto f(r,t)$ est dérivable et

$$\forall r \in [0,a[,\quad \frac{\partial f}{\partial r}(r,t) = \frac{-2\cos t + 2r}{1 - 2r\cos t + r^2}.$$

Pour tout $r \in [0,a[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial r}(r,t)$ est mesurable et, d'après la question précédente :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial r}(r,t)\right| \leqslant \frac{2\,|\cos t| + 2r}{h(r,t)} \leqslant \frac{4}{(1-a)^2}.$$

(c) Comme on a de plus vu que $t \mapsto f(r,t)$ est intégrable pour tout r, on peut appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre : pour $r \in [0,a[$, $F'(r)$ existe et vaut :

$$F'(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r,t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-2\cos t + 2r}{1 - 2r\cos t + r^2}\mathrm{d}t.$$

Comme a était arbitraire, F est dérivable sur $[0,1[$ et l'expression de $F'(r)$ ci-dessus est valable pour tout $r \in [0,1[$.

4. (a) On a pour tout $n \geqslant 0$: $\big|r^n\cos(nt)\big| \leqslant r^n$ et la série géométrique $\sum r^n$ converge puisque $0 \leqslant r < 1$. On pose et on calcule :

$$\begin{aligned}
P(r,t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} r^n\cos(nt) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} r\mathrm{e}^{int} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} r\mathrm{e}^{-int} \\
&= \frac{1}{2}\frac{r\mathrm{e}^{it}}{1 - r\mathrm{e}^{it}} + \frac{1}{2}\frac{r\mathrm{e}^{-it}}{1 - r\mathrm{e}^{-it}} = \frac{1}{2}\frac{r\mathrm{e}^{-it} - r^2 + r\mathrm{e}^{it} - r^2}{(1 - r\mathrm{e}^{it})(1 - r\mathrm{e}^{-it})} \\
&= \frac{r\cos t - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}.
\end{aligned}$$

(b) Soit, pour $N \in \mathbb{N}$, $f_N(t) = \sum_{n=0}^{N} r^n\cos(nt)$. Pour tout N, la fonction f_N est continue donc mesurable sur $[-\pi,\pi]$. Comme pour tout $(N,t) \in \mathbb{N}\times[-\pi,\pi]$,

$$|f_N(t)| \leqslant \sum_{n=0}^{N} r^n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r},$$

et comme la fonction constante $t \mapsto 1/(1-r)$ est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(nt) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} r^n \cos(nt) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\sin nt}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

(chaque intégrale est nulle !).

5. Pour $r \in]0,1[$ fixé, on a :

$$\begin{aligned} F'(r) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-2\cos t + 2r}{1 - 2r\cos t + r^2} \,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{2}{r} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r\cos t - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2} \,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{2}{r} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(nt) \,\mathrm{d}t = 0. \end{aligned}$$

[Pour $r = 0$, on a directement : $F'(0) = \int_{-\pi}^{\pi} -2\cos(t)\mathrm{d}t = 0$.]

On en déduit que F est constante sur $]0,1[$. Comme F est continue sur $[0,1]$, elle est constante sur $[0,1]$ et vaut :

$$\forall r \in [0,1], \quad F(r) = F(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1)\mathrm{d}t = 0.$$

Pour $r > 1$, on a d'après la fin de la question 1 :

$$F(r) = 4\pi \ln r.$$