Contrôle écrit n° 1

7 novembre 2016 – 1 h 30

Quelques idées fausses

— Dans plusieurs copies, on lit $\lim_{n\to\infty}\int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \mathrm{d}\mu$ alors que $\int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \mathrm{d}\mu$ ne dépend pas de n...
— la négation de « $f(y)$ a une limite lorsque y tend vers x » *n'est pas* « $f(y)$ tend vers $+\infty$ lorsque y tend vers x » ;
— pour plusieurs d'entre vous, il y a une confusion à éclaircir entre :
  — l'application J est borélienne ;
  — la tribu borélienne ;
  — la partie B est borélienne ;
— une idée fausse répandue : un borélien est un intervalle ; variante (fausse aussi) : un borélien est une réunion dénombrable d'intervalles ;
— variantes (toujours fausses) : un ouvert est un intervalle ouvert $]a, b[$; un fermé est un segment $[a, b]$;
— l'image réciproque d'un borélien B par $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x)$, ne peut pas être un couple $(f^{-1}(B), y)$ [couple étrange car formé d'un ensemble et d'un réel] ni même le couple $(f^{-1}(B), \mathbb{R})$ mais le *produit* $f^{-1}(B) \times \mathbb{R}$.

Exercice 1 (Question de cours) Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Soit $\varphi : X \to \mathbb{R}$ une fonction étagée mesurable. Soit $\varphi(X) = \{y_1, \dots, y_n\}$, c'est-à-dire que $y_1, \dots, y_n$ sont les valeurs prises par φ (en nombre fini puisque φ est étagée). Alors $\varphi = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{1}_{A_i}$, où $A_i = \varphi^{-1}\big(\{y_i\}\big) \in \mathscr{T}$ puisque φ est mesurable. L'intégrale de φ est :

$$\int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{p} y_i \,\mu(A_i).$$

Pour $f : X \to [0, +\infty]$ mesurable et positive, l'intégrale de f est :

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu,\ \varphi \text{ étagée mesurable telle que } \varphi \leqslant f \right\}.$$

2. Soit $N \in \mathbb{N}$, posons $F_N = \sum_{n=0}^N f_n$. Comme les f_n sont mesurables, chaque F_N est mesurable. Comme les f_n sont positives, la suite $(F_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante et sa limite est $F = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Par le théorème de convergence monotone, on a :

$$\int_X F \,\mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{N\to\infty} F_N \,\mathrm{d}\mu = \lim_{N\to\infty} \int_X F_N \,\mathrm{d}\mu \overset{(*)}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu,$$

où l'égalité $(*)$ est justifiée par la linéarité de l'intégrale.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. *Première solution.* Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$. On note $L = \inf_{y>x} f(y) = \inf\big\{f(y),\ y > x\big\}$. D'une part, on a : $L \leqslant f(y)$ pour tout $y \in]x, +\infty[$. D'autre part, $L + \varepsilon$ n'est pas un minorant de $\{f(y),\ y > x\}$, il existe y_0 tel que $f(y_0) \leqslant L+\varepsilon$. Mais comme f est croissante, on a pour tout $y \in]x, y_0]$ l'encadrement $L \leqslant f(y) \leqslant L + \varepsilon$. Par suite, $\lim\limits_{y \overset{>}{\to} x} f(y) = L$.

   On montre de même que $\lim\limits_{y \overset{<}{\to} x} f(y) = \sup\big\{f(y),\ y < x\big\}$.

   Deuxième solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme f est croissante, la suite $\big(f(x + 1/n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et elle est minorée par $f(x)$, soit L sa limite. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, on ait : $0 \leqslant f(x + 1/n) - L \leqslant \varepsilon$. Pour $y \in]x, x + 1/n_0[$, on a donc : $0 \leqslant f(y) - L \leqslant f(x + 1/n_0) - L \leqslant \varepsilon$, d'où : $\lim\limits_{y \overset{>}{\to} x} f(y) = L$.

   On montre de même que $\lim\limits_{y \overset{<}{\to} x} f(y) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x - 1/n)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme f est croissante, on a : $f(x^-) \leqslant f(x^+)$. Le point x appartient à l'ensemble D des points de discontinuité de f si et seulement si $f(x^-) < f(x^+)$. Pour $x \in D$, on choisit un rationnel $r_x \in]f(x^-), f(x^+)[$. L'application $D \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto r_x$ ainsi définie est injective puisque si x et y sont deux points de D tels que $x < y$, on a :

   $$r_x < f(x^+) \leqslant f(y^-) < r_y.$$

   Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, D est au plus dénombrable.

Exercice 3

1. Soit B un borélien de $\mathbb{R}$. L'image $F(x, y)$ d'un point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ appartient à B si et seulement si $f(x) \in B$ si et seulement si $x \in f^{-1}(B)$. Comme f est borélienne, $f^{-1}(B)$ est un borélien de $\mathbb{R}$ donc $F^{-1}(B) = f^{-1}(B) \times \mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$. De même, $H^{-1}(B) = \mathbb{R} \times B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$. Par suite, F et H sont boréliennes.
2. Un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ appartient à $G(f)$ si et seulement si $F(x, y) = H(x, y)$. Par suite, $G(f) = (F - H)^{-1}\big(\{0\}\big)$: cela montre que $G(f)$ est l'image réciproque du borélien $\{0\}$ par l'application $F - H$, qui est borélienne comme différence d'applications boréliennes, de sorte que $G(f)$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4

1. *Première solution.* On vérifie trois conditions.
   — D'abord $\mathbb{R} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et $\alpha \cdot \mathbb{R} = \mathbb{R}$ donc $\mathbb{R} \in \mathscr{C}$.
   — Soit $A \in \mathscr{C}$. Alors $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ donc $A^c \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. De plus, $\alpha \cdot ({}^cA) = {}^c(\alpha \cdot A)$ (en effet, $x \mapsto \alpha x$ est bijective donc $\{\alpha x,\ x \in A\}$ et $\{\alpha y,\ y \in {}^cA\}$ sont complémentaires) et $\alpha \cdot A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ puisque $A \in \mathscr{C}$ donc ${}^c(\alpha \cdot A) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Ainsi, ${}^cA \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, d'où ${}^cA \in \mathscr{C}$.
   — Soit (A_n) une suite d'élément de $\mathscr{C}$. Alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ appartient à $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ en tant que réunion dénombrable de boréliens et on a, pour $x \in \mathbb{R}$:

   $$\begin{aligned} x \in \alpha \cdot \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \ &\Leftrightarrow\ \exists y \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ x = \alpha y \\ &\Leftrightarrow\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists y \in A_n,\ x = \alpha y \\ &\Leftrightarrow\ x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha \cdot A_n. \end{aligned}$$

   Or $\alpha \cdot A_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ pour tout n donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha \cdot A_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, d'où $\alpha \cdot \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Ainsi, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{C}$.

Deuxième solution. Introduisons l'homothétie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \alpha x$. C'est une bijection continue dont la réciproque $h^{-1} = H : x \mapsto x/\alpha$ est continue. Pour $A \subset \mathbb{R}$, $\alpha \cdot A = h(A) = H^{-1}(A)$, l'image réciproque de A par l'application H. Alors, $A \in \mathscr{C}$ signifie que A et $H^{-1}(A)$ sont des boréliens.

Pour montrer que $\mathscr{C}$ est une tribu, on vérifie trois points :

— d'abord, $\mathbb{R}$ appartient à $\mathscr{C}$ car $\mathbb{R} = h(\mathbb{R}) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$;

— ensuite, soit $A \in \mathscr{C}$; on a : ${}^cA \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ ($\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est une tribu) et : $\alpha \cdot ({}^cA) = H^{-1}({}^cA) = {}^cH^{-1}(A) = {}^c(\alpha \cdot A)$, qui est un borélien puisque $\alpha \cdot A$ en est un ; par suite, ${}^cA$ appartient à $\mathscr{C}$;

— enfin, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$, on a : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et :

$$\alpha \cdot \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = H^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H^{-1}(A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha \cdot A_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

(car $\alpha \cdot A_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) ; par suite, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ appartient à $\mathscr{C}$.

2. D'après la remarque de l'énoncé, les intervalles $[a, b]$ (pour a et b réels tels que $a \leqslant b$) appartiennent à $\mathscr{C}$. Comme $\mathscr{C}$ est une tribu, elle contient la tribu engendrée par ces intervalles, c'est-à-dire $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. D'où : $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}$.

   L'inclusion $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R})$ est contenue dans la définition de $\mathscr{C}$, d'où l'égalité : $\mathscr{C} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

   Si $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, alors $A \in \mathscr{C}$ donc $\alpha \cdot A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ par définition de $\mathscr{C}$.

   La réciproque est vraie, elle résulte de ce qui précède en remplaçant α par $\beta = 1/\alpha$.

   Variante. Si $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, alors $\alpha \cdot A = H^{-1}(A)$, qui est un borélien comme image réciproque d'un borélien par une application (continue donc) borélienne. Réciproquement, si $\alpha \cdot A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, alors $A = h^{-1}(\alpha \cdot A) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ puisque h est borélienne. [Autrement dit, on a montré que $\mathscr{C} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ même sans montrer *a priori* que $\mathscr{C}$ est une tribu...]

3. On vérifie les deux axiomes :

   — pour $A = \emptyset$, on a : $\alpha \cdot A = \emptyset$ donc $\mu(\emptyset) = \lambda(\emptyset)/\alpha = 0$;

   — si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de boréliens deux à deux disjoints, on a (déjà vu que) :

$$\alpha \cdot \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha \cdot A_n.$$

   Or les $\alpha \cdot A_n$ sont deux à deux disjoints car, pour m et n entiers distincts,

$$\alpha \cdot A_m \cap \alpha \cdot A_n = H^{-1}(A_m) \cap H^{-1}(A_n) = H^{-1}(A_m \cap A_n) = H^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

   Il vient :

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \frac{1}{\alpha}\lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha \cdot A_n\Big) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(\alpha \cdot A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

   Ceci montre que μ est une mesure.

4. Pour un intervalle ouvert $]a, b[$ (avec a, b réels), on a :

$$\mu\big(]a, b[\big) = \frac{1}{\alpha}\lambda\big(]\alpha a, \alpha b[\big) = \frac{\alpha b - \alpha a}{\alpha} = b - a.$$

   Or on sait d'après le cours qu'il existe une unique mesure sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ qui satisfait à cette propriété, la mesure de Lebesgue. D'où : $\mu = \lambda$.

Exercice 5

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire, en notant $g = |f| : x \mapsto |f(x)|$:

$$B_n = g^{-1}\big(]n, +\infty[\big).$$

Or g est $(\mathscr{T}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable comme composée de fonctions mesurables et $]n, +\infty[$ est un borélien donc $B_n \in \mathscr{T}$.

2. Pour $x \in X$, si $|f(x)| > n+1$, alors $|f(x)| > n$. Donc $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout n. Comme B_1 est inclus dans X et que la mesure $\mu(X)$ est finie, on a : $\mu(B_1) < \infty$. On a donc :

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu\Big(\bigcap_{n\geqslant 1} B_n\Big).$$

Soit $x \in X$ fixé. Dès que $n > |f(x)|$, x n'appartient pas à B_n. Donc l'intersection des B_n est vide et $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \geqslant 1$ tel que $\mu(B_n) \leqslant \varepsilon$. On définit $g : X \to \mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin B_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, $g = f\mathbf{1}_{^cB_n}$. Cette fonction g est bornée par n et coïncide avec f sur ${}^cB_n$, d'où :

$$\mu\Big(\big\{x \in X;\ f(x) \neq g(x)\big\}\Big) = \mu(B_n) \leqslant \varepsilon.$$