Fiche 6 - Formes quadratiques, coniques

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^3$ de la structure euclidienne usuelle. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(\vec{u}) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3), \quad \text{pour tout } \vec{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Déterminer la forme polaire φ_q de q.
2. Calculer la matrice A de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale. Est-ce que $\mathcal{B}$ est une base q-orthogonale ?
4. Donner l'expression analytique de q dans la base $\mathcal{B}$. Est-ce que q est définie positive ?
5. Quelle est la signature de q ?
6. Quel est le rang de q ?

Exercice 2. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(\vec{u}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3), \quad \text{pour tout } \vec{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Réduire q en utilisant la méthode de Gauss et déterminer une base orthogonale pour q.

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique et soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation

$$x^2 + xy + y^2 - 1 = 0.$$

1. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ dans laquelle l'équation de $\mathcal{C}$ est
$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 - 1 = 0.$$
2. Quelle est la nature de $\mathcal{C}$?
3. Déterminer les éléments caractéristiques de $\mathcal{C}$ (directrice, foyer, excentricité et sommets).
4. Dessiner $\mathcal{C}$ et ses éléments caractéristiques.

Exercices supplémentaires

Exercice 4. Déterminer parmi les applications suivantes, définies sur E^2, celles qui sont bilinéaires et celles qui sont bilinéaires et symétriques :

$$(a)\ E = \mathbb{R}^2,\ \varphi(x, y) = x_1x_2 - y_1y_1,\ (b)\ E = \mathbb{R}^3,\ \varphi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

$$(c)\ E = \mathbb{R}_2[X],\ \varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t),\ (d)\ E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}),\ \varphi(f, g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)\, dt.$$

Exercice 5. Déterminer la forme polaire des formes quadratiques suivantes définies sur E

(a) $E = \mathbb{R}^2,\ q(x_1, x_2) = (x_1+x_2)^2,$ (b) $E = \mathbb{R}^2,\ q(x_1, x_2) = 2x_1x_2,$ (c) $E = \mathbb{R}^3,\ q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2+x_2^2+2x_1x_3.$

Exercice 6. En appliquant la méthode de réduction de Gausse, donner une base orthogonale pour les formes qudratiques suivantes :

$$(a)\ q(x_1, x_2) = 5x_12 + 2x_1x_2 + 5x_2^2,\ (b)\ q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$(c)\ q(x_1, x_2, x_3) = 7x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Exercice 7. On munit $\mathbb{R}^3$ de la structure euclidienne usuelle. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique dont l'expression analytique dans la base canonique C est

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 2\sqrt{3}x_2x_3.$$

1. Calculer la matrice $A = \mathcal{M}_C(q)$ de q dans la base canonique C.
2. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale.
3. Donner l'expression analytique de q dans la base $\mathcal{B}$. Est-ce que q est définie positive ?

Exercice 8. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(\vec{u}) = 3x^2 + 3y^2 - 2yz + 3z^2 - 2xy - 2xz, \quad \text{pour tout } \vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Si $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, écrire la matrice $M_{\mathcal{C}}(q)$ de q dans la base $\mathcal{C}$ et trouver ses valeurs propres.
2. Déterminer une base orthonormale $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dans laquelle la matrice $M_{\mathcal{B}}(q)$ de q est diagonale.
3. Décrire l'ensemble $\mathcal{E} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 | q(\vec{v}) = 1\}$. Cet ensemble est appelé ellipsoïde.

Exercice 9. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(\vec{u}) = x^2 - 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2, \quad \text{pour tout } \vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Déterminer une base orthonormale $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dans laquelle la matrice $M_{\mathcal{B}}(q)$ de q est diagonale.
2. Décrire l'ensemble $\mathcal{E} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 | q(\vec{v}) = 1\}$. Cet ensemble est appelé hyperboloïde à une nappe.

Exercice 10. Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et u un endomorphisme sur E. Montrer que l'application définie par $q(x) = \langle x | u(x) \rangle$ pour tout $x \in E$ est une forme quadratique sur E.

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et φ une forme bilinéaire sur E. Montrer que l'application $q : E \to \mathbb{R}$ définie par $q(x) = \varphi(x, x)$ est une forme quadratique.

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique sur E. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $A = M_{\mathcal{B}}(q)$ la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$. Soit f l'endomorphisme de E associé à la matrice A. Montrer que $Ker(q) = Ker(f)$.

Exercice 13. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique sur E. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $A = M_{\mathcal{B}}(q)$ la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer que q est positive si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont positives.
2. Montrer que q est définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

Exercice 14. Sur $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle, réduire en base orthonormée les formes quadratiques suivantes :

$$q_1(x, y) = x^2 + 10xy + y^2, \quad q_2(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 2xy.$$

Exercice 15. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(\vec{u}) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3), \quad \text{pour tout } \vec{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Réduire, en utilisant la méthode de réduction de Gauss, la forme quadratique q.
2. Déterminer une base orthogonale pour q.

Exercice 16. On munit $\mathbb{R}^3$ de la structure euclidienne usuelle. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique dont l'expression analytique dans la base canonique C est

$$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1.$$

1. Montrer que q est définie positive.
2. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}$ pour q, d'abord par la méthode de réduction de Gauss, puis par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
3. Quelle est la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$?

Exercice 17. *(Relativité restreinte)* L'espace-temps de la relativité restreinte est modélisé par *l'espace de Minkowski*. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 et soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique. On dit que (E, φ) est un *espace de Minkowski* s'il existe une base $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ telle que pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$, avec $\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + x_4\vec{e}_4$ et $\vec{v} = x'_1\vec{e}_1 + x'_2\vec{e}_2 + x'_3\vec{e}_3 + x'_4\vec{e}_4$

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 - x_4x'_4.$$

1. Exprimer la forme quadratique q associée à φ (la forme de Lorentz) et montrer qu'elle est non-dégénérée.
2. Quelle est la signature de q ? Quel est le rang de q ?

Exercice 18. *(Extremum et formes quadratiques)* Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $Df(a) = 0$. On note H_a la matrice hessienne de f au point a et q_a la forme quadratique associée

$$q_a(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \cdot H_a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que si f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a, alors q_a est une forme quadratique positive (resp. négative).
2. Montrer que si q_a est définie positive (resp. définie négative) alors f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a.

Exercice 19. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n où $n \geq 1$. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie pour tous $P, Q \in E$ par

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)\, dt.$$

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ?
2. On considère l'application $q : E \to \mathbb{R}$ définie par $q(P) = \varphi(P, P)$. Montrer que q est une forme quadratique.
3. Calculer la matrice de q dans la base $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$.
4. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui soit q-orthogonale.

Exercice 20. Soit $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique et soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation

$$5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 1 = 0.$$

1. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ dans laquelle l'équation de $\mathcal{C}$ est
$$2x'^2 + 6y'^2 - 1 = 0.$$
2. Quelle est la nature de $\mathcal{C}$?
3. Déterminer les éléments caractéristiques de $\mathcal{C}$ (directrice, foyer, excentricité et sommets).
4. Dessiner $\mathcal{C}$ et ses éléments caractéristiques.

Exercice 21. Pour les coniques suivantes, déterminer la nature, les éléments caractéristiques et une équation réduite :

$$(a)\ x^2 - xy + y^2 = 1, \quad (b)\ x^2 + \sqrt{3}xy + x - 2 = 0, \quad (c)\ 2xy - 2\sqrt{2}x - 1 = 0.$$

Exercice 22. Pour les coniques suivantes, déterminer la nature, les éléments caractéristiques et une équation réduite :

$$(a)\ x^2 + xy + y^2 = 1, \quad (b)\ x^2 + 4xy + y^2 = 1, \quad (c)\ x^2 + xy + y^2 + 2 = 0; \quad (d)\ x^2 - 2xy + y^2 = 1.$$