CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU 3
(Mercredi 07 décembre 2016 - Durée : 1h)

Questions de cours. (5 pts)

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est-elle convergente ? (1 pt)

   La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann et elle est convergente, si et seulement si, $\alpha > 1$.

2. Calculer la somme de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1}$. (2,5 pt)

   La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est une série géométrique de raison x et son rayon de convergence est 1. Sa somme sur $]-1,1[$ est $s(x) = \frac{1}{1-x}$. En dérivant la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ terme-à-terme, on obtient la série $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = s'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

3. Énoncer les conditions de Dirichlet (Du théorème de Dirichlet pour les séries de Fourier). (1,5 pt)

   Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. Les conditions de Dirichlet sont :
   - *Les discontinuités de f (si elle existent) sont de première espèce et sont en un nombre fini dans tout intervalle fermé et borné $[a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.*
   - *f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.*

Exercice 1. (7 pts) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{\ln(1+n^{-2})}{n^\alpha}, \;\; n \geq 1.$$

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ? (2 pts)

On calcule d'abord un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a

$$\ln(1+\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n^2}$$

et donc

$$\frac{\ln(1+\frac{1}{n2})}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^2 \times n^\alpha} = \frac{1}{n^{2+\alpha}}.$$

La suite est convergente, si et seulement si, elle admet une limite finie. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{2+\alpha}} = \begin{cases} 0 & si \quad 2+\alpha \geq 0, \\ +\infty & \quad sinon. \end{cases}$$

Par conséquent, par équivalence, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si $\alpha \geq -2$.

2. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est-elle convergente ? (3 pts)

Par la question 1, on a $u_n \sim v_n$ où $v_n = \dfrac{1}{n^{2+\alpha}}$. Les deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ sont à termes positifs et $u_n \sim v_n$. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ est une série de Riemann convergente, si et seulement si, $2+\alpha > 1$, si et seulement si, $\alpha > -1$. Toutes les conditions sont réunies pour appliquer le critère des équivalents et d'après ce dernier, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > -1$.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$. (2 pts)

Comme $u_n \sim v_n$ où $v_n = \dfrac{1}{n^{2+\alpha}}$ et comme par le critère de D'Alembert,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2+\alpha}}{(n+1)^{2+\alpha}} = 1,$$

le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ est 1, on conclut que le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est 1.

On aurait pu aussi utiliser directement le critère de D'Alembert :

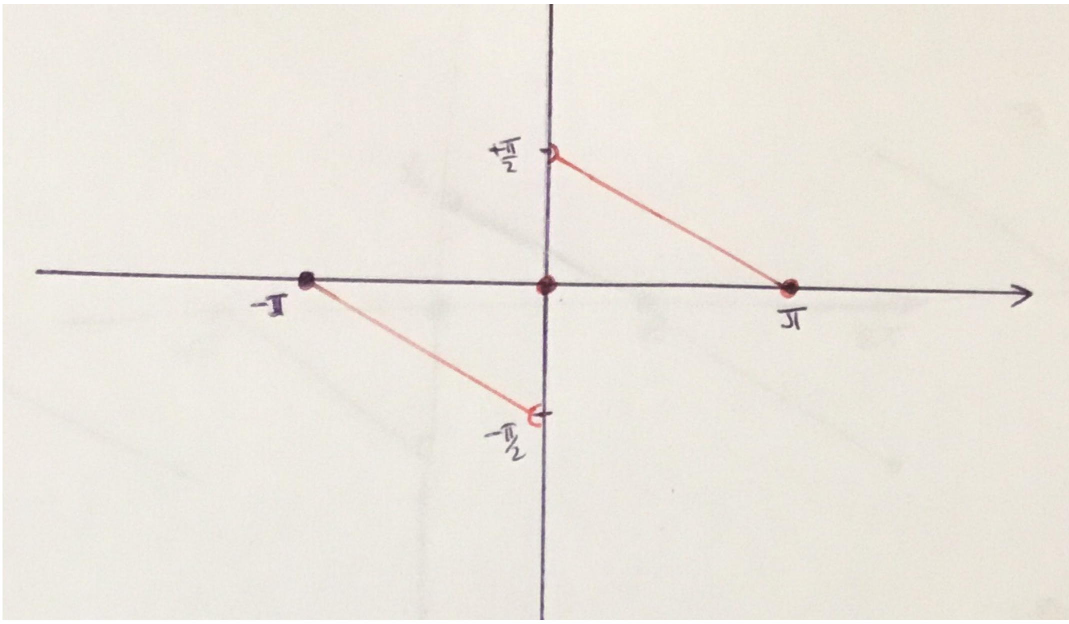
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \times \frac{\ln(1+\frac{1}{(n+1)^2})}{\ln(1+\frac{1}{n^2})} = 1.$$

(Pour calculer la limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{(n+1)^2})}{\ln(1+\frac{1}{n^2})}$, on utilise les équivalents précédents.)

Exercice 2. (9 pts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, impaire et définie par

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2} \qquad \text{sur }]0, \pi].$$

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. (1 pt)



2. Montrer que le coefficient b_n de la série de Fourier de f est donné par :

$$b_n = \frac{1}{n}, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

(3 pts)

Comme f est impaire, $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. On a pour tout $n \geq 1$ et comme f est impaire, on ramène le calcul de b_n sur l'intervalle où f est explicite :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt,$$

car $f(t)\sin(nt)$ devient paire. On a

$$\begin{aligned}
b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi - t}{2})\sin(nt)\,dt &= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2}\Big[\frac{-\cos(nt)}{n}\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt\Big)\\
&= \frac{1-(-1)^n}{n} - \frac{1}{\pi}\Big(\Big[\frac{-\cos(nt)}{n}\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}\,dt\Big)\\
&= \frac{1-(-1)^n}{n} + \frac{1}{\pi}(\frac{\pi\cos(n\pi)}{n}) = \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

3. En déduire la série de Fourier de f. On notera sa somme Sf. (1 pts)

La série de Fourier de f est

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}.$$

4. Pour quelles valeurs de x a-t-on $Sf(x) = f(x)$? (2 pts)

Les points de discontinuité de f sont $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Donc f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. On voit que f est dérivable à gauche et à droite en tout point $x \in \mathbb{R}$. En $x_k = 2k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$, on a, par périodicité :

$$f(x_k^+) = f(0^+) = \frac{\pi}{2} = -f(x_k^-) = -f(0^-), \frac{f(x_k^+) + f(x_k^-)}{2} = 0 = f(x_k).$$

Par conséquent d'après le théorème de Dirichlet :

$$Sf(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

D'où $Sf(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5. En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin n}{n}.$$

(2 pts)

D'après la question précédente :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = Sf(x) = f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où, en prenant $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$