

Fiche 2 - Matrices, déterminants

Exercice 1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits matriciels possibles ? En calculer au moins trois.

Exercice 2. On considère les matrices A, B, C, D définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A + B, AB, AD, \lambda A, A - \lambda C$, où λ est un nombre réel quelconque.
2. Calculer $\det(A), \det(B), \det(AB)$. A-t-on $\det(AB) = \det(BA)$?

Exercice 3. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 . On considère les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

(donnés en composantes dans cette base).

1. Montrer de deux façons différentes que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont linéairement indépendants.
2. En déduire que $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de \mathbb{R}^2 .
3. Écrire un vecteur quelconque $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ de \mathbb{R}^2 sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$. En déduire la matrice des composantes $M_{\mathcal{C}}(\vec{w})$ du vecteur \vec{w} dans la base \mathcal{C} .
4. Donner la matrice de passage $P = P_{\mathcal{BC}}$ ainsi que la matrice de passage inverse $P^{-1} = P_{\mathcal{CB}}$.
5. Vérifier que $PP^{-1} = P^{-1}P = I$ (donc les matrices $P_{\mathcal{CB}}$ et $P_{\mathcal{BC}}$ sont inverses l'une de l'autre) et que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés :

$$(a) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + 3y, 3x - 5y); \quad (b) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (2x - y, x + y, x - y).$$

Exercice 5. Soit f l'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par

$$u(x, y, z) = (x + y + z, y - z, x - 2z).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Écrire la matrice A de f relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .
3. Calculer $\det(A)$. La matrice A est-elle inversible ?

Exercices supplémentaires

Exercice 6. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer A^2 et A^3 .
2. Calculer A^n pour tout entier n strictement positif.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (2x - z, -x + 3y + z, z).$$

1. Calculer $f(\vec{0})$, $f(1, 1, 1)$ et $f(1, 0, -1)$.
2. Montrer que f est une application linéaire.
3. Calculer les images de \vec{e}_1, \vec{e}_2 et \vec{e}_3 par f où $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 . En déduire la matrice de f dans la base \mathcal{B} .

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 à coefficients dans \mathbb{R} . Montrer que si A est inversible alors son inverse est donné par la formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés :

$$(a) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (3x + 7y, 2x - 5y); \quad (b) f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + y, y - z).$$

Exercice 10. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ de la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. On considère les endomorphismes $\frac{d}{dX}$ et $\frac{d^2}{dX^2}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ définis par

$$\frac{d}{dX}(P) = P', \quad \frac{d^2}{dX^2}(P) = P''.$$

Calculer la matrice des endomorphismes $\frac{d}{dX}$ et $\frac{d^2}{dX^2}$ dans la base \mathcal{B} . Quelle relation y a-t-il entre ces deux matrices ?

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ les deux applications linéaires définies, en coordonnées cartésiennes, par

$$f(x, y) = (2x + y, -y, x - 2y), \quad g(x, y, z) = (x - z, 2y).$$

1. Calculer les applications composées $g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $f \circ g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
2. Trouver les matrices A et A' qui représentent f et g dans les bases canoniques de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .
3. Vérifier que les produits $A'A$ et AA' représentent les composés $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

1. Déterminer la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de \mathbb{R}^2 .
2. Calculer f^{-1} et en déduire A^{-1} .
3. Est-ce que l'application f est un isomorphisme ?
4. Si on considère le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^2 , est-ce que l'application f est une isométrie ?

Exercice 13. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire canoniquement associée à A (par rapport à la base canonique). Soit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donnés en composantes dans la base canonique. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^3 et donner la matrice de f dans cette nouvelle base.

Exercice 14. L'espace vectoriel \mathbb{R}^2 (resp. \mathbb{R}^3) est muni de la base canonique. Écrire les matrices des applications linéaires suivantes dans la base canonique :

1. La rotation d'angle θ dans \mathbb{R}^2 .
2. La rotation d'angle θ autour de Oz dans \mathbb{R}^3 .
3. La réflexion par rapport à Ox dans \mathbb{R}^2 .
4. La réflexion par rapport au plan xOy dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 15. Soit \mathcal{B} (resp. \mathcal{D}) la base canonique de \mathbb{R}^4 (resp. \mathbb{R}^2).

1. Soit $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{D} est :

$$L_{DB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer une base de $\text{Ker}(L)$ et de $\text{Im}(L)$.

2. Soit $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ donné par la matrice dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{D} :

$$L_{DB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer une base de $\text{Ker}(L)$ et de $\text{Im}(L)$.

Exercice 16. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ de la base $\mathcal{B} = (1, t, X^2)$. Donner la matrice de l'endomorphisme L de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base \mathcal{B} qui est défini par : pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $L(P)(X) = P(X - 1)$.

Exercice 17. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$A(x) = \begin{pmatrix} \text{ch } x & \text{sh } x \\ \text{sh } x & \text{ch } x \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A(x)$ est inversible d'inverse $A(-x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer $A(x)^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 18. Dans \mathbb{R}^3 muni de la base canonique $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le système $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Donner la matrice de passage $P = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$.
3. Donner la matrice de passage inverse $P^{-1} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ et vérifier que $PP^{-1} = P^{-1}P = I$.
4. Décomposer le vecteur $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} .

Exercice 19. (*Calcul de A^n*) Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et soit $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E . Soit L l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est donnée par :

$$A = L_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\text{Ker}(L)$ et $\text{Im}(L)$, sous-espaces de E et en donner une base. Quel est le rang de L ?
2. On note $\vec{\epsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{\epsilon}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3, \vec{\epsilon}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Montrer que $B' = (\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3)$ est une base de E . Préciser la matrice de passage $P = P_{BB'}$ de B à B' , ainsi que la matrice inverse P^{-1} .
3. Exprimer $L(\vec{\epsilon}_1), L(\vec{\epsilon}_2), L(\vec{\epsilon}_3)$ dans la base B' et en déduire la matrice $D = L_{B'}$ de L dans la base B' .
4. Quelle relation lie les matrices A, D, P ?
5. Pour tout entier $n \geq 1$ exprimer la matrice A^n .