EXERCICES

SUR LES SÉRIES ENTIÈRES

G.EGUETHER

9 janvier 2012

Table des matières

Avertissement

On trouvera dans ce qui suit de nombreux exercices sur les séries entières classés (grossièrement) par thèmes. On s'est efforcé de rendre chaque exercice autonome. Cependant les trois premiers exercices traités dans le chapitre « Exercices théoriques » seront admis comme résultats de cours.

Une même série entière peut se trouver traitée dans plusieurs exercices, suivant des points de vue différents.

Ces exercices ayant été rédigés pour des publics divers, et à des moments divers, il existe, malgré un effort d'uniformisation, certaines disparités dans les démonstrations. Par ailleurs, dans chaque exercice, on propose une démonstration (parfois deux), mais il peut, bien sûr, y avoir d'autres moyens de procéder.

Le théorème de convergence dominée sera utilisé sans hypothèse de convergence uniforme sur les compacts.

Les formules suivantes seront utilisées sans démonstration.

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \text{si } x > 0\,.$$

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \quad \text{(Formule de Stirling)}\,.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

$$\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \sim \ln n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln n\right) = \gamma \quad \text{(constante d'Euler)}\,.$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x\,.$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\ \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$$

lorsque $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

$$\sum_{p=n}^{m} v_p w_p = v_m \left(\sum_{k=n}^{m} w_k\right) + (v_{m-1} - v_m)\left(\sum_{k=n}^{m-1} w_k\right) + \cdots + (v_n - v_{n+1})\left(\sum_{k=n}^{n} w_k\right)\,.$$

(Formule de sommation d'Abel)

Si la fonction f est de classe C^{n+1} sur $[\,a,\, b\,]$, alors

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}\, f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}\, f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, dt\,.$$

(Formule de Taylor avec reste intégral)

On utilisera également :

- la fonction Γ définie sur $]\,0,\, +\infty\,[$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt\,,$$

qui vérifie, pour tout nombre réel x strictement positif

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,,$$

et pour tout entier naturel n plus grand que 1,

$$\Gamma(n) = (n-1)!\ ;$$

- les formules de trigonométrie usuelles, valables pour les nombres **complexes**, comme par exemple

$$\cos(z+z') = \cos z\, \cos z' - \sin z\, \sin z'$$

avec de plus

$$\cos iz = i\,\mathrm{ch}\, z \quad \text{et} \quad \sin iz = i\,\mathrm{sh}\, z\,.$$

Chapitre 1

RAYON ET DOMAINE DE CONVERGENCE

1.1 Règle d'Alembert

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient
$$a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$$
converge (resp. converge absolument).

On a
$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}$$
et cette expression converge vers
$$R = 1\,.$$
Si $x = -1$, on a
$$a_n x^n = \frac{1}{\ln n}$$
qui est le terme général d'une série positive divergente (série de Bertrand).

Si $x = 1$,
$$a_n x^n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$$
est le terme général d'une série alternée, car la suite $(1/\ln n)$ décroît et converge vers 0. Elle converge sans converger absolument. Donc
$$\mathscr{A} =]-1,\,1[\quad \text{et} \quad \mathscr{C} =]-1,\,1]\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient
$$a_n = \frac{\ln n}{n^2}$$
converge (resp. converge absolument).

On a
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}} \frac{(n+1)^2}{n^2}$$
et cette expression converge vers
$$R = 1\,.$$
Si $|x| = 1$, on a
$$|a_n x^n| = \frac{\ln n}{n^2}$$
qui est le terme général d'une série de Bertrand convergente. La série converge donc absolument dans ce cas et par suite
$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = [\,-1,\, 1\,]\ .$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient
$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!}$$
converge (resp. converge absolument).

Comme, au voisinage de 0 on a
$$\ln(1+u) = u + \circ(u)\,,$$
on en déduit
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-1} = \exp\left((-n-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \exp(-1 + \circ(1))$$
et cette expression converge vers
$$R = \frac{1}{e}\,.$$
Si $|x| = 1/e$, on a, grâce à la formule de Stirling,
$$|a_n x^n| \sim \frac{n^{n+1}}{e^n} \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\,.$$
et cette expression ne converge pas vers 0. La série diverge grossièrement dans ce cas. Donc
$$\mathscr{A} = \mathscr{C} =]\,-1/e,\, 1/e\,[\ .$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient
$$a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}$$
converge (resp. converge absolument).

Comme, au voisinage de 0 on a
$$\ln(1+u) = u + \circ(u)\,,$$
on en déduit
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \exp\left((n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp(1+\circ(1))$$
et cette expression converge vers
$$R = e\,.$$
Si $|x| = e$, on a, grâce à la formule de Stirling
$$|a_n x^n| \sim \frac{e^n}{n^{n+1}}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\,.$$
La série diverge donc, mais le terme général tend vers 0.

On a
$$\frac{a_{n+1}e^{n+1}}{a_n e^n} = e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1} = \exp\left(1-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\,.$$
Mais, si $u \geq 0$, on a
$$\ln(1+u) \geq u - \frac{u^2}{2}$$
d'où, si $n > 1$,
$$\frac{a_{n+1}e^{n+1}}{a_n e^n} \leq \exp\left(1-(n+1)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)\right) = \exp\left(\frac{1-n}{2n^2}\right) < 1\,.$$
La suite $(a_n e^n)$ est donc décroissante. Alors la série de terme général $a_n(-e)^n$ est alternée et converge donc. Il en résulte que
$$\mathscr{A} = \,]-e,\, e[\quad \text{et} \quad \mathscr{C} = [-e,\, e[\,.$$

Soit k un nombre entier naturel non nul. Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient

$$a_n = \frac{(n!)^k}{(kn)!}$$

converge (resp. converge absolument).

On a

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(kn+k)\cdots(kn+1)}{(n+1)^k}$$

et cette expression converge vers

$$R = k^k\,.$$

Si $|x| = k^k$, on a, grâce à la formule de Stirling,

$$|a_n x^n| = \frac{(n!)^k k^{kn}}{(kn)!} \sim \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}\right)^k \left(\frac{e}{kn}\right)^{kn} \frac{1}{\sqrt{2kn\pi}}\, k^{kn} \sim \frac{\sqrt{2n\pi}^{\,k-1}}{\sqrt{k}}$$

et cette expression ne converge pas vers 0. La série diverge grossièrement dans ce cas, donc

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = \left]\,-k^k,\, k^k\,\right[\,.$$

Soit k un nombre entier naturel non nul. Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient

$$a_n = \frac{(kn)!}{(n!)^k}$$

converge (resp. converge absolument).

On a

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^k}{(kn+k)\cdots(kn+1)}$$

et cette expression converge vers

$$R = k^{-k}\,.$$

Si $|x| = k^{-k}$, on a, grâce à la formule de Stirling

$$|a_n x^n| = \frac{(kn)!}{(n!)^k k^{kn}} \sim \left(\left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)^k \left(\frac{kn}{e}\right)^{kn} \sqrt{2kn\pi}\, k^{-kn} \sim \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2\pi}^{\,k-1}}\, \frac{1}{n^{(k-1)/2}}\,.$$

Le résultat dépend de k.

• Si $k > 3$, alors $(k-1)/2 > 1$ et la série converge absolument, d'où

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = [-k^{-k}, k^{-k}] .$$

• Si $k = 1$, la série est la série géométrique de terme général x^n, et

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} =]-1, 1[.$$

• Si $k = 2$ ou $k = 3$, la série diverge et est à termes positifs si $x = k^{-k}$. Par contre si $x = -k^{-k}$, on a

$$\frac{a_{n+1}(k^{-k})^{n+1}}{a_n(k^{-k})^n} = \frac{(kn+k)\cdots(kn+1)}{(n+1)^k k^k} = \frac{(kn+k)\cdots(kn+1)}{(kn+k)\cdots(kn+k)} < 1 ,$$

ce qui montre que la suite $(a_n k^{-kn})$ décroît. L'équivalent obtenu plus haut montre qu'elle converge vers 0. La série de terme général $a_n x^n$ est alors alternée et converge donc, d'où

$$\mathscr{A} =]-k^{-k}, k^{-k}[\quad \text{et} \quad \mathscr{C} = [-k^{-k}, k^{-k}[.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient

$$a_n = \operatorname{ch} n$$

converge (resp. converge absolument).

On a

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(n+1)} = \frac{1+e^{-2n}}{e+e^{-2n-1}} ,$$

et cette expression converge vers

$$R = \frac{1}{e} .$$

Si $|x| = 1/e$, on a

$$|a_n x^n| = \frac{e^n + e^{-n}}{2e^n} ,$$

et cette expression converge vers $1/2$ et non pas vers 0. La série diverge grossièrement dans ce cas, donc

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} =]-1/e, 1/e[.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient

$$a_n = 2^n + 1$$

converge (resp. converge absolument).

On a
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}\,,$$
et cette expression converge vers
$$R = \frac{1}{2}\,.$$
Si $|x| = 1/2$, on a
$$a_n x^n = 1 + \frac{1}{2^n}$$
et cette expression converge vers 1 et pas vers 0. La série diverge grossièrement dans ce cas, donc
$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = \left]-1/2,\, 1/2\right[\,.$$

Soit a, b, c trois nombres réels. Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient
$$a_n = e^{an^2+bn+c}$$
converge (resp. converge absolument).

On a
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = e^{-2an-a-b}\,.$$
• Si $a > 0$, la limite de cette expression est nulle. Donc la série converge uniquement si $x = 0$.
$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = \{0\}\,.$$
• Si $a = 0$, la limite de cette expression est
$$R = e^{-b}\,.$$
Si $|x| = e^{-b}$, on a
$$|a_n x^n| = e^c\,,$$
et la série diverge grossièrement donc
$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = \left]\,e^{-b},\, e^{b}\,\right[\,.$$
• Si $a < 0$, la limite de cette expression est
$$R = +\infty\,,$$
et donc
$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = \mathbb{R}\,.$$

1.2 Règle de Cauchy

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient

$$a_n = \frac{1}{n^n}$$

converge (resp. converge absolument).

On a

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{n}$$

et cette expression converge vers 0. Le rayon de convergence vaut alors

$$R = +\infty\,,$$

donc

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = \mathbb{R}\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient

$$a_n = \sqrt[n]{n}$$

converge (resp. converge absolument).

On a

$$\sqrt[n]{|a_n|} = n^{1/n^2} = \exp\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\,,$$

et cette expression converge vers $1 = 1/R$. Le rayon de convergence vaut donc

$$R = 1\,.$$

Si $|x| = 1$, on a

$$|a_n x^n| = n^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right)\,,$$

et cette expression converge vers 1 et pas vers 0. La série diverge grossièrement dans ce cas, donc

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = \left]-1,\,1\right[\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient

$$a_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n$$

converge (resp. converge absolument).

On a

$$\sqrt[n]{|a_n|} = 2 + \frac{1}{n},$$

et cette expression converge vers $2 = 1/R$. Le rayon de convergence vaut donc

$$R = \frac{1}{2}.$$

Si $|x| = 1/2$, on a

$$|a_n x^n| = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{2} + \circ(1)\right)$$

et cette expression converge vers $\sqrt{e}$ et pas vers 0. La série diverge grossièrement dans ce cas, donc

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = \left] -1/2,\, 1/2 \right[.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient

$$a_n = (\ln n)^n$$

converge (resp. converge absolument).

On a

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \ln n,$$

et cette expression converge vers $+\infty$. Le rayon de convergence vaut donc

$$R = 0.$$

La série converge uniquement si $x = 0$, donc

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = \{0\}.$$

Soit a un nombre réel strictement positif, et b, c deux nombres réels. Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient

$$a_n = \left(\frac{an+b}{n+d}\right)^n$$

converge (resp. converge absolument).

On a

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left|\frac{an+b}{n+d}\right|,$$

et cette expression converge vers $a = 1/R$. Le rayon de convergence vaut donc

$$R = \frac{1}{a}.$$

Si $|x| = 1/a$, on a, à partir d'un certain rang,

$$|a_n x^n| = \left|\frac{an+b}{an+ad}\right|^n = \left|1 + \frac{b-ad}{a(n+d)}\right|^n = \exp\left(n \ln\left|1 + \frac{b-ad}{a(n+d)}\right|\right) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{b-ad}{a(n+d)}\right)\right).$$

Or

$$\frac{b-ad}{a(n+d)} = \frac{b-ad}{an}\,\frac{1}{1+\frac{d}{n}} = \frac{b-ad}{an}\,(1+\circ(1)),$$

d'où

$$|a_n x^n| = \exp\left(\frac{b-ad}{a} + \circ(1)\right),$$

et cette expression converge vers $\exp\frac{b-ad}{a}$ et pas vers 0. La série diverge grossièrement dans ce cas, donc

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = \left]-1/a,\, 1/a\right[.$$

1.3 Avec des équivalents

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient

$$a_n = \cos\frac{1}{n}$$

converge (resp. converge absolument).

Lorsque n tend vers l'infini on a

$$a_n \sim 1.$$

Le rayon de la série entière est donc le même que celui de la série géométrique de terme général x^n et l'on a

$$R = 1\,.$$

Si $|x| = 1$, on a

$$|a_n x^n| = \cos\frac{1}{n}$$

et le terme général tend vers 1 et pas vers 0. La série diverge grossièrement et

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = \,]-1,\,1\,[\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient

$$a_n = \sin\frac{1}{n}$$

converge (resp. converge absolument).

On a

$$a_n \sim \frac{1}{n}\,.$$

La série a même rayon de convergence que celui de la série entière de coefficient $1/n$ qui est de rayon

$$R = 1\,.$$

Pour $x = -1$ la série de terme général $a_n x^n$ ne converge pas absolument, mais elle converge car elle est alternée, puisque la suite $(\sin(1/n))$ décroît et converge vers 0. Pour $x = 1$ la série diverge. Alors

$$\mathscr{A} = \,]-1,\,1\,[\quad \text{et}\quad \mathscr{C} = \,[-1,\,1\,[\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

converge (resp. converge absolument).

On a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}\,,$$

et la série entière étudiée a même rayon de convergence que la série entière de coefficient $1/n$ qui est de rayon

$$R = 1\,.$$

Lorsque $x = 1$, il résulte de l'équivalent précédent que la série de terme général $\ln(1 + 1/n)$ diverge par comparaison à la série harmonique.

Lorsque $x = -1$, il résulte de la croissance de la fonction logarithme que la suite $(\ln(1 + 1/n))$ est décroissante. Par ailleurs, puisqu'elle est équivalente à $(1/n)$, la suite $(\ln(1 + 1/n))$ converge vers 0. Alors la série de terme général $(-1)^n \ln(1 + 1/n)$ est alternée et converge donc, mais elle ne converge pas absolument. On en déduit que

$$\mathscr{A} =]-1,\,1[\quad \text{et} \quad \mathscr{C} = [-1,\,1[\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient

$$a_n = \sin\frac{1}{n^2}$$

converge (resp. converge absolument).

On a

$$\sin\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}\,,$$

et donc

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \sim \frac{(n+1)^2}{n^2}$$

et cette expression converge vers

$$R = 1\,.$$

Lorsque $|x| = 1$ on a

$$|a_n x^n| = \sin\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}\,,$$

et la série de terme général $a_n x^n$ converge absolument par comparaison à une série de Riemann. Alors

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = [-1,\,1]\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient

$$a_n = \frac{2^n}{\ln(e^n + n + 1)}$$

converge (resp. converge absolument).

Cherchons tout d'abord un équivalent de $\ln(e^n+n+1)$. On écrit

$$\ln(e^n+n+1) = \ln(e^n(1+(n+1)e^{-n}) = n + \ln(1+(n+1)e^{-n})\,,$$

puis

$$\ln(e^n+n+1) = n\left(1+\frac{\ln(1+(n+1)e^{-n})}{n}\right)\,.$$

Comme la suite $\left(\dfrac{\ln(1+(n+1)e^{-n})}{n}\right)$ converge vers 0, il en résulte que

$$\ln(e^n+n+1) \sim n\,.$$

On a alors

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \sim \frac{2^n}{n}\,\frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n}\,,$$

et la suite (a_n/a_{n+1}) converge vers

$$R = \frac{1}{2}\,.$$

Si $x = 1/2$, on a

$$a_n x^n = \frac{1}{\ln(e^n+n+1)} \sim \frac{1}{n}\,,$$

et la série de terme général $1/n$ diverge, donc la série de terme général $a_n x^n$ diverge.

Si $x = -1/2$, on a

$$a_n x^n = \frac{(-1)^n}{\ln(e^n+n+1)}\,,$$

mais la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{\ln(e^x+x+1)}$$

est décroissante, puisque sa dérivée vaut

$$f'(x) = -\frac{e^x+1}{e^x+x+1}\,\frac{1}{(\ln(e^x+x+1))^2}\,,$$

et est négative sur $[\,0,\,+\infty\,[$. Il résulte alors du critère de Leibniz que la série de terme général $a_n x^n$ converge. Par contre elle ne converge pas absolument. Donc

$$\mathscr{C} = [\,-1/2,\,1/2\,[\quad \text{et} \quad \mathscr{A} =]\,-1/2,\,1/2\,[\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient

$$a_n = \mathrm{E}(\sqrt{2^n+1})$$

converge (resp. converge absolument), où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x.

On peut utiliser le fait que, quand x tend vers l'infini,

$$\mathrm{E}(x) \sim x\,.$$

Alors

$$\mathrm{E}(\sqrt{2^n+1}) \sim \sqrt{2^n+1} \sim 2^{n/2}\,,$$

et la série géométrique de raison $(\sqrt{2}\,x)^n$ a pour rayon

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Par ailleurs, si $|x| = 1/\sqrt{2}$ la suite $(|a_n x^n|)$ converge vers 1, donc le terme général de la série ne tend pas vers 0. La série diverge grossièrement, et il en résulte que

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = \left]\,-1/\sqrt{2},\, 1/\sqrt{2}\,\right[\,.$$

> Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient
>
> $$a_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$
>
> converge (resp. converge absolument).

Tout d'abord si l'on pose

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\,,$$

on a

$$a_n \sim b_n\,,$$

et les séries de termes généraux a_n et b_n ont le même rayon de convergence. On a

$$\frac{|b_n|}{|b_{n+1}|} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\,,$$

et cette expression tend vers

$$R = 1\,.$$

Par contre la série de terme général $|b_n|$ est une série de Riemann divergente, donc la série de terme général $|a_n|$ diverge également. Il en résulte que

$$\mathscr{A} = \left]\,-1,\, 1\,\right[\,.$$

En utilisant le développement limité en 0 de $\ln(1+u)$, avec $u = (-1)^n/\sqrt{n}$, on obtient

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\,.$$

La série de terme général $O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ converge absolument.

Si $x = 1$, on a
$$a_n x^n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) .$$
La série de terme général $1/(2n)$ diverge, alors que la série de terme général $(-1)^n/\sqrt{n}$, qui est alternée, converge. Il en résulte que la série de terme général $a_n x^n$ diverge.

Si $x = -1$
$$a_n x^n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) .$$
La série de terme général $1/\sqrt{n}$ diverge, alors que la série de terme général $(-1)^n/(2n)$, qui est alternée, converge. Il en résulte que la série de terme général $a_n x^n$ diverge.

Finalement
$$\mathscr{C} =]-1,\, 1[\, .$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient
$$a_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$
converge (resp. converge absolument).
Calculer la somme de la série si $x = 1$.

Tout d'abord si l'on pose
$$b_n = \frac{(-1)^n}{n} \, ,$$
on a
$$a_n \sim b_n \, ,$$
et les séries de termes généraux a_n et b_n ont le même rayon de convergence. On a
$$\frac{|b_n|}{|b_{n+1}|} = \frac{n+1}{n} \, ,$$
et cette expression tend vers
$$R = 1 \, .$$
Par contre la série de terme général $|b_n|$ diverge, donc celle de terme général $|a_n|$ également. Il en résulte que
$$\mathscr{A} =]-1,\, 1[\, .$$

En utilisant le développement limité en 0 de $\ln(1+u)$, avec $u = (-1)^n/n$, on obtient

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument.

Si $x = 1$, on a

$$a_n x^n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général $(-1)^n/n$ est alternée et converge. Il en résulte que la série de terme général $a_n x^n$ converge.

Si $x = -1$

$$a_n x^n = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général $1/n$ diverge. Il en résulte que la série de terme général $a_n x^n$ diverge.

Finalement

$$\mathscr{C} =]-1,\, 1]\,.$$

Si $x = 1$, on somme à partir de $n = 2$, et si, $p \geq 1$,

$$a_{2p} = \ln\left(1 + \frac{1}{2p}\right) = \ln\frac{2p+1}{2p},$$

et

$$a_{2p+1} = \ln\left(1 - \frac{1}{2p+1}\right) = \ln\frac{2p}{2p+1} = -a_{2p}\,.$$

Donc

$$\sum_{k=2}^{2p+1} a_k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{2p} a_k = a_{2p}\,.$$

Les deux suites précédentes convergent vers 0. Donc

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = 0\,.$$

Soit P un polynôme non nul. Quel est le rayon de convergence des séries de coefficients $P(n)$, $1/P(n)$, $P(1/n)$?

Si le terme dominant de P est αx^p, on a

$$P(n) \sim \alpha n^p\,.$$

Alors
$$\frac{|P(n)|}{|P(n+1)|} \sim \frac{n^p}{(n+1)^p}$$
et ceci converge vers
$$R = 1\,.$$
Le résultat est le même pour $1/P(n)$.

Si le terme de plus bas degré de P est βx^q, on a alors
$$P(1/n) \sim \frac{\beta}{n^q}\,.$$
Alors
$$\frac{|P(1/n)|}{|P(1/(n+1))|} \sim \frac{(n+1)^q}{n^q}$$
et ceci converge vers
$$R = 1\,.$$

1.4 Par comparaison

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient
$$a_n = (2-(-1)^n)^{-n}$$
converge (resp. converge absolument).

Pour tout entier naturel n on a
$$1 \leq 2-(-1)^n$$
donc
$$0 \leq a_n \leq 1\,.$$
En particulier
$$|a_n x|^n \leq |x|^n\,.$$
La série converge absolument si $|x| < 1$, donc $R \geq 1$.

Pour $|x| = 1$, on a
$$a_{2n}x^{2n} = 1$$
et le terme général de la série ne tend pas vers 0. La série diverge grossièrement, donc $R \leq 1$. Finalement on a
$$R = 1\,,$$

et
$$\mathscr{A} = \mathscr{C} =]-1,\, 1[\;.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient
$$a_n = \sin n$$
converge (resp. converge absolument).

Pour tout entier naturel n on a
$$|a_n| \leq 1\,.$$
Le rayon de convergence de la série entière est donc supérieur ou égal à celui de la série géométrique de terme général x^n, donc $R \geq 1$.

Par ailleurs, on montre par l'absurde que la suite (a_n) ne converge pas vers 0. Si c'était le cas alors, il résulterait de l'égalité
$$a_{n+1} - a_{n-1} = 2 \sin 1 \cos n$$
que la suite $(\cos n)$ convergerait aussi vers 0, et donc que la suite $(\cos^2 n + \sin^2 n)$ convergerait vers 0, ce qui n'est pas possible.

On en déduit que $R \leq 1$. Finalement on a
$$R = 1\,,$$
et
$$\mathscr{A} = \mathscr{C} =]-1,\, 1[\;.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient
$$a_n = \frac{i^n n^2}{n^2+1}$$
converge (resp. converge absolument).

Pour tout entier naturel n on a
$$|a_n| < 1\,.$$
La série entière a donc un rayon de convergence supérieur ou égal à celui de la série géométrique de terme général x^n, donc $R \geq 1$. Par ailleurs, la suite $(|a_n|)$ converge vers 1, donc ne converge

pas vers 0. On en déduit que $R \leq 1$. Finalement

$$R = 1\,,$$

et

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} =]-1,\,1[\;.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient

$$a_n = \frac{1}{\ln n!}$$

converge (resp. converge absolument).

Pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a

$$n \leq n! \leq n^n\,,$$

donc

$$\ln n \leq \ln n! \leq n \ln n\,.$$

Posons

$$b_n = \frac{1}{\ln n} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{n \ln n}\,.$$

On a donc

$$0 \leq c_n \leq a_n \leq b_n\,.$$

Mais

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \frac{1}{1 + \ln \frac{1+1/n}{\ln n}}\,,$$

et cette expression converge vers 1, ainsi que (c_n/c_{n+1}). Les séries entières de coefficients b_n et c_n sont donc de rayon 1. Il en sera de même de celle de coefficient a_n et

$$R = 1\,.$$

Si $|x| = 1$, on a

$$|a_n x^n| = \frac{1}{\ln n!} \geq \frac{1}{n \ln n}\,.$$

On compare à une série de Bertrand divergente, et la série ne converge pas absolument.

Si $x = 1$, on a encore

$$a_n x^n \geq \frac{1}{n \ln n}\,,$$

et la série diverge.
Si $x = -1$, on a

$$a_n x^n = (-1)^n \frac{1}{\ln n!}\,,$$

et la série est alternée donc converge, car la suite $(1/\ln n!)_{n\geq 2}$ décroit et converge vers 0. Alors

$$\mathscr{A} =]-1,\, 1[\quad \text{et} \quad \mathscr{C} = [-1,\, 1[\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient

$$a_n = \left(\sin \frac{n\pi}{3}\right)^n$$

converge (resp. converge absolument).

La valeur la plus grande prise par $|\sin(n\pi/3)|$ lorsque n varie est

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Donc si $n \geq 1$, on a

$$|a_n| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\,.$$

La série entière géométrique de terme général $(\sqrt{3}/2)^n x^n$ a pour rayon de convergence $2/\sqrt{3}$, donc $R \geq 2/\sqrt{3}$.

Si $|x| = 2/\sqrt{3}$, on a

$$|a_{3n+1}x^{3n+1}| = 1\,,$$

et la suite $(a_n x^n)$ ne peut pas converger vers 0. La série de terme général $a_n x^n$ diverge grossièrement, donc $R \leq 2/\sqrt{3}$. Il en résulte que

$$R = \frac{2}{\sqrt{3}}\,,$$

et que

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} =]-2/\sqrt{3},\, 2/\sqrt{3}\,[\,.$$

Soit a_n la $n-$ième décimale de $\sqrt{3}$. Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient a_n converge (resp. converge absolument).

Pour tout entier naturel n on a

$$0 \leq a_n \leq 9\,,$$

et puisque la série de terme général $9x^n$ est de rayon de convergence 1, la série proposée est de rayon de convergence $R \geq 1$.

Si la suite (a_n) convergeait vers 0, alors, comme c'est une suite d'entiers elle serait stationnaire et ses coefficients seraient nuls à partir d'un certain rang, ce qui impliquerait que $\sqrt{3}$ serait rationnel. Donc la suite (a_n) ne converge pas vers 0 et il en résulte que $R \leq 1$. Finalement

$$R = 1\,,$$

et

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = \left]-1,\, 1\right[\ .$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient

$$a_n = \ln \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

converge (resp. converge absolument).

On peut s'écrire

$$a_n = \ln\left(\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2}\right)\,.$$

La suite a_n converge vers 0. Donc $|a_n| < 1$ à partir d'un certain rang, et la série de terme général $a_n x^n$ converge absolument, donc converge, si $|x| < 1$. Il en résulte que $R \geq 1$.

On peut encore écrire

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\,,$$

et, en utilisant le développement limité en 0 de $\ln(1+u)$, on obtient

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\,.$$

La série de terme général $O(1/n^{3/2})$ converge absolument par comparaison à une série de Riemann.

La série de terme général $(-1)^n/\sqrt{n}$ converge d'après le critère de Leibniz et la série de terme général $1/n$ diverge. Il en résulte que la série de terme général a_n diverge.

On a aussi

$$(-1)^n a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\,.$$

La série de terme général $1/\sqrt{n}$ est une série de Riemann divergente. La série de terme général $(-1)^n/n$ converge d'après le critère de Leibniz. Il en résulte que la série de terme général $(-1)^n a_n$ diverge. Alors la série entière de terme général $a_n x^n$ est de rayon $R \leq 1$. Il en résulte que

$$R = 1\,,$$

et que

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} =]\,-1,\ 1\,[\ .$$

Soit (a_n) une suite de nombres entiers de l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$. Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient a_n converge (resp. converge absolument).

Puisque

$$1 \leq a_n \leq 6\,,$$

la série de terme général a_n a même rayon de convergence que la série géométrique de terme général x^n, donc

$$R = 1\,.$$

Si $|x| = 1$, ou bien la suite (a_n) ne converge pas, ou bien elle converge mais dans ce cas elle est stationnaire et sa limite appartient à $\{1,2,3,4,5,6\}$. Dans tous les cas la suite (a_n) ne converge pas vers 0 et la série diverge grossièrement, donc

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} =]\,-1,\ 1\,[\ .$$

1.5 Séries paires

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels les séries entières de termes généraux

$$u_n(x) = (-1)^n \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-n^2} x^{2n}$$

et

$$v_n(x) = (-1)^n \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-n^2} \frac{x^{2n}}{n}$$

convergent (resp. convergent absolument).

1) Série de terme général $u_n(x)$.

En utilisant la règle de Cauchy,

$$\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \left(1+\frac{2}{n}\right)^{-n} x^2 .$$

Or

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right) = \exp(-2+\circ(1))\,,$$

et cette suite converge vers e^{-2}. Il en résulte que la suite $(\sqrt[n]{|u_n(x)|})$ converge vers $e^{-2}x^2$. Donc si $e^{-2}x^2 < 1$, c'est-à-dire si $|x| < e$ la série converge absolument, alors que si $e^{-2}x^2 > 1$, c'est-à-dire si $|x| > e$ la série ne converge pas absolument. Il en résulte que

$$R = e\,.$$

Si $|x| = e$, on a

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &= \left(1+\frac{2}{n}\right)^{-n^2} e^{2n} \\ &= \exp\left(2n - n^2\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(2n - n^2\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= e^{2+\circ(1)}\,. \end{aligned}$$

La suite $(|u_n(x)|)$ converge vers e^2 et pas vers 0. La série diverge donc grossièrement et

$$\mathscr{C} = \mathscr{A} = \,]-e,\, e[\,.$$

2) Série de terme général $v_n(x)$.

Cette série se déduit de la série de terme général $2u_n(x)/x$ en en prenant une primitive. Elle a donc même rayon de convergence que la précédente, et

$$R = e\,.$$

Si $|x| = e$, le calcul de la limite de $(|u_n(x)|)$ obtenu plus haut donne l'équivalent

$$|v_n(x)| \sim \frac{e^2}{n}\,,$$

et la série de terme général $|v_n(x)|$ diverge, donc

$$\mathscr{A} = \,]-e,\, e[\,.$$

Cependant la suite $(|v_n(e)|)$ converge vers 0.

Si $x = \pm e$. Considérons la fonction f définie sur $]\,0,\,+\infty\,[$ par

$$f(x) = \left(1+\frac{2}{x}\right)^{-x^2} \frac{e^{2x}}{x}\,.$$

On a

$$g(x) = \ln f(x) = -x^2 \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) + 2x - \ln x$$

et

$$g'(x) = -2x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) + \frac{4x^2+3x-2}{x(x+2)}\,.$$

En posant $u = 1/x$, on obtient

$$g'(x) = -2\,\frac{\ln(1+2u)}{u} + \frac{4+3u-2u^2}{1+2u}\,.$$

En effectuant un développement limité en 0 par rapport à la variable u, on trouve

$$g'(x) = -2\,\frac{2u-2u^2+\circ(u^2))}{u} + (4+3u+\circ(u))(1-2u+\circ(u)) = -u+\circ(u)\,.$$

Donc au voisinage de l'infini

$$g'(x) \sim -\frac{1}{x}\,.$$

Il en résulte que $g'(x)$ est négatif lorsque x est assez grand et donc que que g puis f sont décroissantes pour x assez grand, et finalement que la suite $(f(n))$ est décroissante à partir d'un certain rang. La série de terme général $v_n(x)$ est alors alternée et converge. Il en résulte que

$$\mathscr{C} = [\,-e,\,e\,]\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de terme général

$$u_n(x) = \frac{x^{2n}}{\operatorname{ch} n}$$

converge (resp. converge absolument).

On a

$$\operatorname{ch} n \sim \frac{e^n}{2}\,.$$

La série de terme général $x^n/\operatorname{ch} n$ a même rayon de convergence que la série géométrique de terme général x^n/e^n. Ce rayon vaut donc e. Alors la série de terme général $u_n(x)$ a pour rayon de convergence

$$R = \sqrt{e}\,.$$

Si $|x| = \sqrt{e}$, on a
$$\frac{x^{2n}}{\operatorname{ch} n} \sim 2$$
et la suite $(x^{2n}/\operatorname{ch} n)$ ne converge pas vers 0, donc la série diverge. Alors
$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = \left]-\sqrt{e},\ \sqrt{e}\right[\ .$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de terme général
$$u_n(x) = \frac{(-2)^n}{n + \arctan n}\, x^{2n}$$
converge (resp. converge absolument).

On a
$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{n + \arctan n}{(n+1) + \arctan(n+1)}\, 2x^2 = \frac{1 + \frac{\arctan n}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{\arctan(n+1)}{n}}\, 2x^2\ .$$
Comme la suite $(\arctan n)$ est bornée, le rapport précédent converge vers $2x^2$.

La série converge absolument si $2x^2 < 1$, c'est-à-dire $|x| < 1/\sqrt{2}$ et ne converge pas absolument si $2x^2 > 1$, c'est-à-dire $|x| > 1/\sqrt{2}$. Donc
$$R = \frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

Si $|x| = \sqrt{2}/2$, on a
$$|u_n(x)| = \frac{1}{n + \arctan n} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1 + \frac{\arctan n}{n}} \sim \frac{1}{n}$$
et la série ne converge pas absolument. Donc
$$\mathscr{A} = \left]-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2\right[\ .$$

Si $x = \pm\sqrt{2}/2$, la suite $(1/(n + \arctan n))$ est une suite décroissante qui converge vers 0. Alors, la série de terme général $u_n(x)$ est alternée et converge. Il en résulte que
$$\mathscr{C} = \left[-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2\right]\ .$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de terme général

$$u_n(x) = \pi^{\sqrt{n^2+2n}}\, x^{2n}$$

converge (resp. converge absolument).

On a

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \pi^{\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)}-\sqrt{n^2+2n}}\, x^2\,.$$

Mais

$$\begin{aligned}\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)}-\sqrt{n^2+2n} &= \sqrt{n^2+4n+3}-\sqrt{n^2+2n}\\ &= \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+4n+3}+\sqrt{n^2+2n}}\\ &= \frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}\,.\end{aligned}$$

Il en résulte que la suite $(\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)}-\sqrt{n^2+2n})$ converge vers 1, et donc que la suite $(|u_{n+1}(x)/u_n(x)|)$ converge vers πx^2.

D'après la règle d'Alembert, la série de terme général $u_n(x)$ converge absolument si $\pi x^2 < 1$, c'est-à-dire si $|x| < 1/\sqrt{\pi}$, et ne converge pas absolument si $\pi x^2 > 1$, c'est-à-dire si $|x| > 1/\sqrt{\pi}$. Il en résulte que le rayon de convergence de la série entière est

$$R = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,.$$

Si $|x| = R$, on a

$$u_n(x) = \pi^{\sqrt{n^2+2n}-n} = \pi^{\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}}\,,$$

et la suite $(u_n(x))$ converge vers π et pas vers 0. La série est donc grossièrement divergente et

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = \left]-1/\sqrt{\pi},\, 1/\sqrt{\pi}\right[\,.$$

1.6 Séries incomplètes

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de terme général

$$u_n(x) = \frac{x^{n^2}}{n!}$$

converge (resp. converge absolument).

On a
$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{1}{n+1}\,|x|^{2n+1}\,.$$
La suite $(|u_{n+1}(x)|/|u_n(x)|)$ converge vers 0 si $|x| < 1$ et la série converge absolument dans ce cas, et admet $+\infty$ pour limite si $|x| > 1$ et la série ne converge pas absolument dans ce cas, donc
$$R = 1\,.$$
De plus, si $|x| = 1$, on a
$$|u_n(x)| = \frac{1}{n!}\,,$$
et la série de l'exponentielle converge. Donc
$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = [\,-1,\,1\,]\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de terme général
$$u_n(x) = \frac{x^{n^2}}{n}$$
converge (resp. converge absolument).

On a
$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{n}{n+1}\,|x|^{2n+1}\,.$$
La suite $(|u_{n+1}(x)|/|u_n(x)|)$ converge vers 0 si $|x| < 1$ et la série converge absolument dans ce cas, et admet $+\infty$ pour limite si $|x| > 1$ et la série ne converge pas absolument dans ce cas, donc
$$R = 1\,.$$
Si $x = 1$, on a
$$u_n(x) = \frac{1}{n}\,,$$
et la série de terme général $u_n(x)$ diverge.

Si $x = -1$, puisque n et n^2 on même parité, on a
$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n^2}}{n} = \frac{(-1)^n}{n}$$
et la série de terme général $u_n(x)$ converge d'après le critère de Leibniz mais ne converge pas absolument. Donc
$$\mathscr{A} =]\,-1,\,1\,[\quad \text{et} \quad \mathscr{C} = [\,-1,\,1\,[\,.$$

Pour chacune des séries entières suivantes, déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{A}$ des nombres réels lesquels la série converge absolument et l'ensemble $\mathscr{C}$ des nombres réels pour lesquels la série converge.
1) Série de terme général
$$a_n\, x^n = n!\, x^n\,.$$
2) Série de terme général
$$u_n(x) = n!\, x^{n^2}\,.$$

1) On a
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\,,$$
et cette expression converge vers
$$R = 0\,.$$
La série converge uniquement si $x = 0$ et
$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = \{0\}\,.$$
2) On a
$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = (n+1)|x|^{2n+1}\,.$$
La suite $(|u_{n+1}(x)|/|u_n(x)|)$ converge vers 0 si $|x| < 1$ et la série converge absolument dans ce cas, et admet $+\infty$ pour limite si $|x| > 1$ et la série ne converge pas absolument dans ce cas, donc
$$R = 1\,.$$
Si $|x| = 1$, on a
$$u_n(x) = n!(-1)^{n^2}\,,$$
et la suite $(u_n(x))$ ne converge pas vers 0, donc la série de terme général $u_n(x)$ diverge grossièrement. Alors
$$\mathscr{A} = \mathscr{C} =]-1,\, 1[\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de terme général
$$u_n(x) = x^{n!}$$
converge (resp. converge absolument).

On a
$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = |x|^{(n+1)!-n!} = |x|^{nn!}\,.$$
La suite $(|u_{n+1}(x)|/|u_n(x)|)$ converge vers 0 si $|x| < 1$ et la série converge absolument dans ce cas, et admet $+\infty$ pour limite si $|x| > 1$ et la série ne converge pas absolument dans ce cas, donc
$$R = 1\,.$$
Si $|x| = 1$, on a $|u_n(x)| = 1$, et la suite $(u_n(x))$ ne converge pas vers 0. La série de terme général $u_n(x)$ diverge grossièrement, donc
$$\mathscr{A} = \mathscr{C} =]\,-1,\,1\,[\;.$$

Soit a un nombre réel non nul. Pour chacune des séries entières suivantes, déterminer le rayon de convergence R en fonction de a.
1) Série de terme général
$$u_n(x) = a^n x^{n!}\,.$$
2) Série de terme général
$$v_n(x) = a^{n!} x^n\,.$$

---

1) En appliquent la règle de d'Alembert on obtient
$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = |a|\,|x|^{(n+1)!-n!} = |a|\,|x|^{n\cdot n!}\,.$$
La suite $(|u_{n+1}(x)|/|u_n(x)|)$ converge vers 0 si $|x| < 1$ et la série converge absolument dans ce cas, et admet $+\infty$ pour limite si $|x| > 1$ et la série ne converge pas absolument dans ce cas, donc
$$R = 1\,.$$
Le résultat ne dépend pas de a.

2) De même obtient-on
$$\frac{|v_{n+1}(x)|}{|v_n(x)|} = |x|\,|a|^{n\cdot n!}\,.$$
Lorsque $|a| > 1$, la suite $(|v_{n+1}(x)|/|v_n(x)|)$ admet $+\infty$ pour limite quel que soit x non nul. La série de terme général $v_n(x)$ est toujours divergente et le rayon de convergence de la série entière est donc nul.

Lorsque $|a| < 1$, la suite $(|v_{n+1}(x)|/|v_n(x)|)$ converge vers 0, et la série de terme général $v_n(x)$ est toujours convergente. Le rayon de convergence de la série entière est donc infini.

Lorsque $|a| = 1$, la suite $(|v_{n+1}(x)|/|v_n(x)|)$ converge vers $|x|$. La série converge absolument lorsque $|x| < 1$ et ne converge pas absolument lorsque $|x| > 1$. Le rayon de convergence de la série entière vaut donc 1.

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres entiers strictement positifs telle que la suite (a_{n+1}/a_n) admette une limite ℓ dans $]\,1,\,+\infty\,]$.
Trouver le rayon de convergence R de la série entière de terme général

$$u_n(x) = \frac{x^{a_n}}{a_n}\,.$$

Déterminer la nature de la série si $|x| = R$.

La suite (a_{n+1}/a_n) admet une limite $\ell > 1$. Donc il existe $s > 1$ tel que, à partir d'un certain rang

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq s\,.$$

Alors

$$(\star) \qquad a_{n+1} - a_n \geq a_n(s-1) > 0\,.$$

La suite (a_n) est donc strictement croissante à partir d'un certain rang n_0. On peut alors négliger les premières valeurs de n pour étudier la convergence de la série.

On a

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{a_n}{a_{n+1}}\, x^{a_{n+1}-a_n}\,.$$

La suite $(a_n)_{n\geq n_0}$ est une suite strictement croissante d'entiers. Elle admet $+\infty$ comme limite. Il en est donc de même de la suite $(a_{n+1} - a_n)$ d'après l'inégalité $(\star)$. Alors

• si $x > 1$, la suite $(u_{n+1}(x)/u_n(x))$ admet $+\infty$ comme limite et la série diverge ;

• si $0 < x < 1$, la suite $(u_{n+1}(x)/u_n(x))$ converge vers 0 et la série converge.

Il en résulte que

$$R = 1\,.$$

• Si $|x| = 1$, la suite $(|u_{n+1}(x)|/|u_n(x)|)$ converge vers $1/\ell < 1$ et la série converge absolument.

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient
$$a_n = \frac{\mathrm{E}(\sqrt{n+1}) - \mathrm{E}(\sqrt{n})}{n}\,,$$
où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x, converge (resp. converge absolument).
Calculer la somme de la série lorsque $x = 1$.

Soit p un entier naturel non nul. Si
$$\sqrt{n+1} > p$$
alors
$$n + 1 > p^2$$
donc
$$n > p^2 - 1$$
et
$$n \geq p^2\,.$$
Il en résulte que
$$\sqrt{n} \geq p\,.$$
Il y a deux possibilités.

1) Si l'on a
$$p < \sqrt{n+1} < p + 1$$
alors
$$p \leq \sqrt{n} < p + 1\,.$$
On en déduit
$$\mathrm{E}(\sqrt{n}) = \mathrm{E}(\sqrt{n+1}) = p$$
donc
$$\mathrm{E}(\sqrt{n+1}) - \mathrm{E}(\sqrt{n}) = 0\,.$$
2) Si
$$p < \sqrt{n+1} = p + 1$$
alors on a encore
$$p \leq \sqrt{n} < p + 1\,.$$
On en déduit cette fois
$$\mathrm{E}(\sqrt{n}) = p \quad \text{et} \quad \mathrm{E}(\sqrt{n+1}) = p + 1$$
donc
$$\mathrm{E}(\sqrt{n+1}) - \mathrm{E}(\sqrt{n}) = 1\,.$$
Les seuls coefficients a_n non nuls sont donc ceux tels que
$$n = (p+1)^2 - 1\,,$$

avec p entier supérieur ou égal à 1, et étudier la série entière de coefficient a_n revient à étudier la série de terme général

$$u_p(x) = \frac{x^{p^2-1}}{p^2-1}\,.$$

On a

$$\frac{|u_{p+1}(x)|}{|u_p(x)|} = \frac{p^2-1}{(p+1)^2-1}\,|x|^{2p+1}\,.$$

La suite $(|u_{p+1}(x)|/|u_p(x)|)$ converge vers 0 si $|x| < 1$ et la série converge absolument dans ce cas, et admet $+\infty$ pour limite si $|x| > 1$ et la série ne converge pas absolument dans ce cas, donc

$$R = 1\,.$$

Comme la série de terme général $1/p^2$ converge, la série converge absolument si $|x| = 1$. Donc

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = [\,-1,\,1\,]\,.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{p=2}^{N} \frac{1}{p^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{N}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{p=1}^{N-1}\frac{1}{p} - \sum_{p=3}^{N+1}\frac{1}{p}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)\,.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p^2-1} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = \frac{3}{4}\,.$$

1.7 Séries diverses

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres **complexes** pour lesquels la série entière de coefficient

$$a_n = \frac{\sqrt{n} - \mathrm{E}(\sqrt{n})}{n}\,,$$

où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x, converge (resp. converge absolument).

Etudions tout d'abord la série entière de coefficient

$$b_n = \sqrt{n} - \mathrm{E}(\sqrt{n}) \,.$$

C'est la série dérivée de la série de terme général a_n. Elle a donc même rayon de convergence.

On a

$$0 \leq \sqrt{n} - \mathrm{E}(\sqrt{n}) \leq 1 \,,$$

Donc, par comparaison à la série géométrique de terme général z^n, on a $R \geq 1$.

Si l'on pose

$$n = p^2 + 2p = (p+1)^2 - 1$$

avec p entier, on a

$$p^2 \leq n < (p+1)^2$$

donc

$$\mathrm{E}(\sqrt{n}) = p \,,$$

et

$$b_{p^2+2p} = \sqrt{p^2+2p} - p = \frac{2p}{\sqrt{p^2+2p}+p} \,.$$

La suite précédente converge vers 1. Il en résulte que la série de coefficient b_n est grossièrement divergente et que $R \leq 1$. Finalement

$$R = 1 \,.$$

On a

$$\mathrm{E}(\sqrt{n}) = p$$

si et seulement si

$$p^2 \leq n \leq p^2 + 2p \,,$$

c'est-à-dire

$$n = p^2 + k$$

avec

$$0 \leq k \leq 2p$$

et dans ce cas

$$a_n = \frac{\sqrt{p^2+k} - p}{p^2+k} = \frac{k}{(p^2+k)(\sqrt{p^2+k}+p)} \,,$$

et, puisque

$$(p^2+k)(\sqrt{p^2+k}+p) = n(\sqrt{n}+p) \leq (p+1)^2(2p+1) \,,$$

on obtient

$$\sum_{n=p^2}^{p^2+2p} a_n = \sum_{k=0}^{2p} \frac{k}{(p^2+k)(\sqrt{p^2+k}+p)} \geq \sum_{k=0}^{2p} \frac{k}{(p+1)^2(2p+1)} \,,$$

La somme de droite fait apparaître la somme des premiers entiers d'où,

$$\sum_{n=p^2}^{p^2+2p} a_n \geq \frac{1}{(p+1)^2(2p+1)} \frac{2p(2p+1)}{2} = \frac{p}{(p+1)^2}\,.$$

Comme

$$\frac{p}{(p+1)^2} \sim \frac{1}{p}\,,$$

la série de terme général $p/(p+1)^2$ diverge, et donc la série de terme général

$$c_p = \sum_{n=p^2}^{p^2+2p} a_n$$

diverge également. Alors, puisque

$$\sum_{n=1}^{p^2+2p} a_n = \sum_{k=1}^{p} c_k\,,$$

la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{p^2+2p} a_n\right)_{p\geq 1}$ admet $+\infty$ pour limite, et comme la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n\right)_{N\geq 1}$ est croissante puisque les nombres a_n sont positifs, on en déduit qu'elle admet aussi $+\infty$ pour limite et donc que la série de terme général a_n diverge.

Il reste à étudier la série de terme général $a_n z^n$ lorsque $|z| = 1$ et $z \neq 1$. On regroupe là aussi les termes de la série par paquets et, pour s vérifiant $0 \leq s \leq 2p$, on étudie

$$d_{s,p} = \sum_{n=p^2}^{p^2+s} a_n z^n = z^{p^2} \sum_{k=0}^{s} a_{p^2+k} z^k\,.$$

Si $p \geq 1$, étudions tout d'abord la fonction f_p définie sur $[\,0,\, 2p\,]$ par

$$f_p(t) = \frac{\sqrt{p^2+t} - p}{p^2+t}\,.$$

On a

$$f_p'(t) = \frac{3p^2 - t}{2(p^2+t)^2(2p+\sqrt{p^2+t})} > 0\,,$$

et f_p est strictement croissante. Alors, si k appartient à $[\,0,\, 2p-1\,]$, on aura

$$a_{p^2+k+1} - a_{p^2+k} = f_p(k+1) - f_p(k) > 0\,.$$

En utilisant la sommation d'Abel, on peut alors écrire,

$$d_{s,p} = z^{p^2}\left(a_{p^2}\sum_{k=0}^{s} z^k + \sum_{k=1}^{s}\left((a_{p^2+k} - a_{p^2+k-1})\sum_{r=k}^{s} z^r\right)\right)\,.$$

et puisque
$$\left|\sum_{r=k}^{s} z^r\right| = \left|\frac{1-z^{s-k+1}}{1-z}\right| \leq \frac{2}{|1-z|}\,,$$
on obtient
$$|d_{s,p}| \leq \frac{2}{|1-z|}\left(a_{p^2} + \sum_{k=1}^{s}(a_{p^2+k} - a_{p^2+k-1})\right) = \frac{2a_{p^2+s}}{|1-z|}\,.$$
Mais
$$a_{p^2+s} = \frac{s}{(p^2+s)(\sqrt{p^2+s}+p)} \leq \frac{s}{2p^3} \leq \frac{1}{p^2}\,,$$
donc
$$|d_{s,p}| \leq \frac{2}{p^2|1-z|}\,.$$
En particulier la série de terme général $d_{2p,p}$ converge. Soit S sa somme, et N un entier supérieur à 1. Si l'on pose
$$p = \mathrm{E}(\sqrt{N}) \quad \text{et} \quad s = N - p^2$$
on a alors
$$\left|S - \sum_{n=1}^{N} a_n z^n\right| = \left|S - \sum_{s=1}^{p-1} d_{2s,s}\right| + |d_{s,p}| \leq \left|S - \sum_{s=1}^{p-1} d_{2s,s}\right| + \frac{2}{p^2|1-z|}\,.$$
Quand N tend vers l'infini, il en est de même de p et le membre de droite tend vers 0. Alors la série de terme général $a_n z^n$ converge vers S. En résumé
$$\mathscr{A} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\} \quad \text{et} \quad \mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1\} \setminus \{1\}\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres **complexes** pour lesquels la série entière de coefficient
$$a_n = \frac{(-1)^{\mathrm{E}(\sqrt{n})}}{n}\,,$$
où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x, converge (resp. converge absolument).

Puisque $|a_n|$ vaut $1/n$, le rayon de convergence est celui de la série de terme général $|z|^n/n$, donc
$$R = 1\,,$$
et comme cette série entière diverge si $|z| = 1$, on obtient
$$\mathscr{A} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}\,.$$

Si n et p sont des entiers supérieurs à 1, on a

$$\mathrm{E}(\sqrt{n}) = p$$

si et seulement si

$$p^2 \leq n \leq p^2 + 2p\,.$$

Donc

$$|a_n - a_{n+1}| = \begin{cases} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)} \leq \dfrac{1}{n^2} & \text{si } p^2 \leq n < n+1 \leq p^2 + 2p \\ \dfrac{1}{p^2+2p} + \dfrac{1}{(p+1)^2} \leq \dfrac{2}{p^2} & \text{si } p^2 + 2p = n < n+1 = (p+1)^2 \end{cases}.$$

Alors, en distinguant dans la sommation suivante selon que $n+1$ est ou non un carré, on obtient, pour tout entier N supérieur à 1,

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n - a_{n+1}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,,$$

et la série de terme général $|a_n - a_{n+1}|$ converge donc.

D'autre part, si $|z| = 1$ et $z \neq 1$, on a

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z^k\right| = \left|\frac{z^n - 1}{z - 1}\right| \leq \frac{|z|^n + 1}{|z-1|} = \frac{2}{|z-1|}\,,$$

La suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^k\right)$ est donc majorée. Ces conditions sont celles du théorème d'Abel et donc la série de terme général $a_n z^n$ est convergente.

Reste le cas $z = 1$. Posons

$$w_p = \left|\sum_{n=p^2}^{p^2+2p} a_n\right| = \sum_{n=p^2}^{p^2+2p} \frac{1}{n}\,.$$

Cette somme contient $2p+1$ termes et, en encadrant chaque terme entre le plus grand et le plus petit, on obtient

$$\frac{2}{p+2} \leq \frac{2p+1}{p^2+2p} \leq w_p \leq \frac{2p+1}{p^2}\,.$$

Il résulte du théorème d'encadrement que la suite (w_p) converge vers 0. Alors

$$w_p - w_{p+1} \leq \frac{2p+1}{p^2} - \frac{2}{p+3} = \frac{7p+3}{p^2(p+3)} \leq \frac{7p+21}{p^2(p+3)} = \frac{7}{p^2}\,,$$

et

$$w_{p+1} - w_p \leq \frac{2p+3}{(p+1)^2} - \frac{2}{p+2} = \frac{3p+4}{(p+1)^2(p+2)} \leq \frac{7p+14}{(p+1)^2(p+2)} = \frac{7}{(p+1)^2} \leq \frac{7}{p^2}\,.$$

Il en résulte que

$$|w_p - w_{p+1}| \leq \frac{7}{p^2}\,,$$

et la série de terme général $(|w_p - w_{p+1}|)$ converge.

Alors, toujours d'après le théorème d'Abel, la série de terme général $(-1)^p w_p$ converge. Mais

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{\mathrm{E}(\sqrt{N})^2-1} a_n + \sum_{n=\mathrm{E}(\sqrt{N})^2}^{N} a_n = \sum_{p=1}^{\mathrm{E}(\sqrt{N})-1} (-1)^p w_p + \sum_{n=\mathrm{E}(\sqrt{N})^2}^{N} a_n\,,$$

et puisque

$$\left|\sum_{n=\mathrm{E}(\sqrt{N})^2}^{N} a_n\right| \leq w_{\mathrm{E}(\sqrt{N})}\,,$$

les suites précédentes convergent vers 0 et la série de terme général a_n converge. Finalement

$$\mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}\,.$$

Soit (a_n) la suite définie par la donnée de $a_0 > 0$ et, pour $n \geq 0$, la relation de récurrence

$$a_{n+1} = \ln(1 + a_n)\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres **complexes** pour lesquels la série entière de coefficient a_n converge (resp. converge absolument).

La fonction f définie sur $[\,0,\,\infty\,[$ par

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

est une fonction strictement croissante de $[\,0,\,\infty\,[$ dans lui-même, et, si $x > 0$, vérifie

$$0 < \ln(1 + x) < x\,.$$

On en déduit que $a_1 < a_0$ et que la suite (a_n) est une suite décroissante de nombres positifs. Comme f est continue, la suite converge vers un point fixe de f. Mais l'équation

$$f(x) = x$$

a pour unique solution le nombre 0. La suite (a_n) converge donc vers 0. Alors

$$a_{n+1} = \ln(1 + a_n) \sim a_n\,,$$

et la suite (a_n/a_{n+1}) converge vers
$$R = 1\,.$$
Posons
$$\alpha = \frac{1}{a_0}\,.$$
On montre par récurrence que, pour tout entier n,
$$a_n \geq \frac{1}{n+\alpha}\,.$$
Si la propriété est vraie à l'ordre n, on a
$$a_{n+1} = \ln(1+a_n) \geq \ln\left(1+\frac{1}{n+\alpha}\right)\,.$$
Mais
$$\ln\left(1+\frac{1}{n+\alpha}\right) = -\ln\frac{n+\alpha}{n+1+\alpha} = -\ln\left(1-\frac{1}{n+1+\alpha}\right) \geq \frac{1}{n+1+\alpha}\,,$$
ce qui donne la propriété à l'ordre $n+1$.

Il en résulte que la série de terme général $|a_nz^n|$ diverge si $|z|=1$, et que la série de terme général a_n diverge, donc
$$\mathscr{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}\,.$$
Puisque la suite (a_n) converge vers 0, on a alors
$$a_{n+1} - a_n = \ln(1+a_n) - a_n \sim -\frac{a_n^2}{2}\,.$$
La série de terme général $a_{n+1}-a_n$ est une série télescopique et converge donc. Alors la série de terme général a_n^2 converge.

Si $|z| = 1$ avec $z \neq 1$, on a
$$\sum_{n=0}^{N} a_nz^n = a_0 + \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1}z^{n+1} = a_0 + z\sum_{n=0}^{N-1} \ln(1+a_n)\,z^n\,.$$
Comme la suite (a_n) converge vers 0, il existe une suite (ε_n) qui converge vers 1 et telle que
$$\ln(1+a_n) = a_n - \frac{a_n^2\varepsilon_n}{2}\,.$$
Alors
$$\sum_{n=0}^{N} a_nz^n = a_0 + z\sum_{n=0}^{N-1} a_nz^n - \frac{z}{2}\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2\varepsilon_nz^n\,,$$
d'où l'on déduit
$$(1-z)\sum_{n=0}^{N} a_nz^n = a_0 - a_Nz^{N+1} - \frac{z}{2}\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2\varepsilon_nz^n\,.$$

Mais, la suite $(a_N z^{N+1})$ converge vers 0, et d'autre part

$$|a_n^2 \varepsilon_n z^n| = O(a_n^2)\,,$$

donc la série de terme général $a_n^2 \varepsilon_n z^n$ converge absolument. Il en résulte que la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right)$ converge et que la série de terme général $a_n z^n$ converge. Finalement

$$\mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1\} \setminus \{1\}\,.$$

Montrer que l'on peut définir une suite (a_n) par la donnée de a_0 dans $]\,0,\,1/4\,[$ et, pour $n \geq 0$, la relation de récurrence

$$a_{n+1} = a_n - 2a_n^{3/2}\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres **complexes** pour lesquels la série entière de coefficient a_n converge (resp. converge absolument).

Soit f la fonction définie sur $[\,0,\,1/4\,]$ par

$$f(x) = x - 2x^{3/2}\,.$$

On a

$$f'(x) = 1 - 3\sqrt{x}\,,$$

et la fonction f admet un maximum en $1/9$ qui vaut $1/27$. Elle est croissante sur $[\,0,\,1/9\,]$ et décroissante sur $[\,1/9,\,1/4\,]$ et s'annule en 0 et $1/4$. On a donc

$$f([\,0,\,1/4\,]) = [\,0,\,1/27\,] \subset [\,0,\,1/4\,]\,.$$

Il en résulte que l'intervalle $[\,0,\,1/4\,]$ est stable par f, ce qui permet de définir une suite par récurrence en partant de a_0 dans $]\,0,\,1/4\,[$ avec la relation

$$f(a_n) = a_{n+1}\,.$$

De plus, pour tout entier $n \geq 0$,

$$0 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq \frac{1}{4}\,.$$

La suite (a_n) est alors décroissante, et puisque f est continue, la suite converge vers l'unique point fixe de f dans $[\,0,\,1/4\,]$ c'est-à-dire 0.

On a alors

$$a_{n+1} = a_n(1 - 2\sqrt{a_n}) \sim a_n\,,$$

et la suite (a_n/a_{n+1}) converge vers

$$R = 1\,.$$

Remarquons que pour $n \geq 1$, on a
$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{27}.$$
On montre alors par récurrence, que pour $n \geq 1$ on a
$$a_n \leq \frac{1}{n^2}.$$
C'est vrai pour n compris entre 1 et 5 puisque
$$a_n \leq \frac{1}{27} \leq \frac{1}{n^2}.$$
Ensuite, en utilisant la croissance de f sur l'intervalle $[0,\, 1/27]$,
$$a_6 = f(a_5) \leq f\left(\frac{1}{27}\right) = \frac{1}{27}\left(1 - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right).$$
En majorant $\sqrt{3}$ par 2, on trouve
$$a_6 \leq \frac{1}{27}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{81} \leq \frac{1}{36},$$
et la propriété est vraie à l'ordre 6.

Supposons la vraie à un ordre $n \geq 6$. Alors, puisque
$$a_n \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{27},$$
on obtient, en utilisant de nouveau la croissance de f sur l'intervalle $[0,\, 1/27]$,
$$a_{n+1} = f(a_n) \leq f\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3}.$$
Mais
$$\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} = -\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \frac{2}{n^3} = \frac{3n+2}{n^3(n+1)^2} \geq 0.$$
Donc
$$a_{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)^2},$$
ce qui montre la propriété à l'ordre $n+1$.

Il en résulte que si $|z| \leq 1$, la série de terme général $|a_n z^n|$ converge, donc
$$\mathscr{A} = \mathscr{C} = \{z \mid |z| \leq 1\}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose

$$a_n = 2^p$$

si l'on a

$$n = \frac{p(p+1)}{2} + k$$

avec $0 \leq k \leq p$. Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficient a_n converge (resp. converge absolument).

Posons

$$\alpha_p = \frac{p(p+1)}{2} = \sum_{k=0}^{p} k\,.$$

On a donc

$$\alpha_{p+1} - 1 = \alpha_p + p\,.$$

Posons également

$$w_p(x) = \sum_{n=\alpha_p}^{\alpha_{p+1}-1} a_n x^n\,.$$

Comme a_n est constant sur l'intervalle de sommation, on a, si $x \neq 1$,

$$w_p(x) = 2^p x^{\alpha_p} \sum_{k=0}^{p} x^k = 2^p x^{\alpha_p} \frac{1 - x^{p+1}}{1 - x}\,.$$

Si $|x| < 1$, on a alors, quand p tend vers l'infini,

$$w_p(x) \sim 2^p x^{\alpha_p} \frac{1}{1-x}\,,$$

et

$$\frac{w_{p+1}(x)}{w_p(x)} \sim 2x^{p+1}\,.$$

Ce quotient tend vers 0. Il en résulte que la série de terme général $w_p(x)$ converge. Or, si l'on a

$$\alpha_p \leq N < \alpha_{p+1}\,,$$

on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{k=0}^{p-1} w_k(x) + \sum_{n=\alpha_p}^{N} a_n x^n\,.$$

Mais

$$\left| \sum_{n=\alpha_p}^{N} a_n x^n \right| \leq \sum_{n=\alpha_p}^{N} a_n |x|^n \leq w_p(|x|)\,,$$

ce qui montre que la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=\alpha_p}^{N} a_n x^n\right)$ converge vers 0. Il en résulte que la série de terme général $a_n x^n$ converge également. On a donc $R \geq 1$.

Si $|x| = 1$, le terme général $|a_n|$ n'est pas borné et la série diverge.

Finalement

$$R = 1\,,$$

et

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} =]\,-1,\,1\,[\ .$$

Soit (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels qui convergent respectivement vers a et b. On suppose a et b strictement positifs. Soit (u_n) vérifiant, pour $n \geq 0$, la relation de récurrence

$$u_{n+2} = a_n u_{n+1} + b_n u_n\ .$$

Montrer que le rayon de convergence R de la série entière de coefficient u_n est supérieur ou égal à la racine positive du trinôme $bX^2 + aX - 1$.

Remarquons pour commencer que si α est la racine positive du trinôme $X^2 - aX - b$, alors $1/\alpha$ est la racine positive de $bX^2 + aX - 1$. Il s'agit donc de démontrer que $R \geq 1/\alpha$.

Soit $\varepsilon > 0$. Les suites (a_n/a) et (b_n/b) convergent vers 1, donc, il existe N tel que, $n \geq N$ implique

$$0 < \frac{a_n}{a} < 1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad 0 < \frac{b_n}{b} < 1 + \varepsilon\,.$$

Soit λ le plus grand des deux nombres $\dfrac{u_N}{((1+\varepsilon)\alpha)^N}$ et $\dfrac{u_{N+1}}{((1+\varepsilon)\alpha)^{N+1}}$. On a donc, si $n = N$ et $N+1$, les inégalités

$$0 \leq u_n \leq \lambda(1+\varepsilon)^n \alpha^n\ .$$

Montrons par récurrence que ces inégalités sont vraies pour tout $n \geq N$.

Si elles sont vraies aux rangs n et $n+1$, on a

$$\begin{aligned}
0 \leq u_{n+2} &= a_n u_{n+1} + b_n u_n \\
&\leq a(1+\varepsilon)\lambda(1+\varepsilon)^{n+1}\alpha^{n+1} + b(1+\varepsilon)\lambda(1+\varepsilon)^n\alpha^n \\
&\leq \lambda(1+\varepsilon)^{n+1}\alpha^n(a(1+\varepsilon)\alpha + b)\,,
\end{aligned}$$

et puisque

$$1 \leq 1 + \varepsilon\,,$$

on a donc
$$0 \leq u_{n+2} \leq \lambda(1+\varepsilon)^{n+2}\alpha^n(a\alpha+b)\,.$$
Mais, α étant racine du trinôme $X^2 - aX - b$, on a
$$a\alpha + b = \alpha^2\,,$$
et on obtient finalement
$$0 \leq u_{n+2} \leq \lambda(1+\varepsilon)^{n+2}\alpha^{n+2}\,,$$
ce qui donne les inégalités au rang $n+2$. Elles sont donc vraie pour tout $n \geq N$.

La série entière de terme général $\lambda(1+\varepsilon)^n\alpha^n$ est une série géométrique de rayon $\dfrac{1}{(1+\varepsilon)\alpha}$. Alors on en déduit que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on a
$$R \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)\alpha}\,,$$
et finalement que
$$R \geq \frac{1}{\alpha}\,,$$
ce qui donne le résultat demandé.

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $u_n(z)$ où, si $p \geq 1$,
$$u_{2p}(z) = \frac{z^{3^p}}{p} \quad \text{et} \quad u_{2p+1}(z) = -\frac{z^{2\cdot 3^p}}{p}\,.$$
Montrer que l'ensemble des nombres **complexes** de module R pour lesquels la série diverge, et l'ensemble des nombres **complexes** de module R pour lesquels la série converge sont denses dans le cercle de rayon R.

On a
$$\frac{|u_{2p+1}(z)|}{|u_{2p}(z)|} = |z|^{3^p} \quad \text{et} \quad \frac{|u_{2p+2}(z)|}{|u_{2p+1}(z)|} = \frac{p}{p+1}\,|z|^{3^p}\,.$$
Ces rapports tendent vers l'infini si $|z| > 1$, et la série ne converge pas absolument dans ce cas, et vers 0 si $|z| < 1$ et la série converge absolument. Il en résulte que
$$R = 1\,.$$
Etudions ce qui se passe pour des éléments du cercle unité $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.

Soit $z = e^{2ki\pi 3^{-r}}$ avec k et r entiers naturels. Alors, si $p \geq r$,
$$u_{2p}(z) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad u_{2p+1}(z) = -\frac{1}{p}\,,$$

et

$$\sum_{k=2r}^{n} u_k(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2/n & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} .$$

Cette somme converge vers 0 et la série de terme général $u_n(z)$ converge. Donc l'ensemble $\mathscr{C}$ des points de $\mathbb{U}$ où cette série converge contient

$$\mathscr{C}_1 = \{e^{2ki\pi 3^{-r}} \mid k \in \mathbb{N}, \, r \in \mathbb{N}\} .$$

Soit $z = e^{(2k+1)i\pi 3^{-r}}$ avec k et r entiers naturels. Alors, si $p \geq r$,

$$u_{2p}(z) = u_{2p+1}(z) = -\frac{1}{p} ,$$

et

$$\sum_{k=2r}^{n} u_k(z) = \begin{cases} \displaystyle -2 \sum_{s=r}^{(n-1)/2} \frac{1}{s} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \displaystyle -2 \sum_{s=r}^{(n-2)/2} \frac{1}{s} - \frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} .$$

Les sommes ci-dessus tendent vers $+\infty$. Il en résulte que la série de terme général $u_n(z)$ diverge et que l'ensemble $\mathscr{D}$ des points de $\mathbb{U}$ où cette série diverge contient

$$\mathscr{D}_1 = \{e^{(2k+1)i\pi 3^{-r}} \mid k \in \mathbb{N}, \, r \in \mathbb{N}\} .$$

Il reste à montrer que l'ensemble des nombres de la forme $2k/3^r$ et l'ensemble des nombres de la forme $(2k+1)/3^r$ (où k et r sont des entiers naturels) sont denses dans $\mathbb{R}$. Pour cela on utilise l'écriture en base 3 d'un nombre réel x. Si l'on écrit

$$x = \sum_{k=s}^{\infty} \alpha_k 3^{-k}$$

avec α_k dans $\{0, 1, 2\}$ et s dans $\mathbb{Z}$, les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=s}^{n} \alpha_k 3^{-k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=s}^{n} \alpha_k 3^{-k} + \frac{1}{3^n}$$

convergent vers x. Or, si l'on pose

$$r_n = \sum_{k=s}^{n} \alpha_k 3^{n-k}$$

on obtient un nombre entier tel que

$$u_n = \frac{r_n}{3^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{r_n + 1}{3^n} .$$

Un des nombres r_n ou $r_n + 1$ est pair, et l'autre est impair. Donc x est limite d'une suite de nombres de la forme $2k/3^r$ et d'une suite de nombres de la forme $(2k+1)/3^r$. En prenant l'exponentielle complexe, on obtient que tout nombre e^{ix} est limite d'une suite de nombres de la forme

$e^{2ki\pi 3^{-r}}$ et d'une suite de nombre de la forme $e^{(2k+1)i\pi 3^{-r}}$, ce qui signifie que les ensembles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{D}_1$ sont denses dans $\mathbb{U}$. Il en sera donc de même des ensembles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ qui contiennent les précédents.

1) Soit n un entier naturel. Montrer qu'il existe un couple unique d'entiers (p, q) tel que

$$n = \frac{p(p+1)}{2} + q \quad \text{et} \quad 0 \leq q \leq p\,.$$

On pose alors

$$a_n = \frac{p+1-q}{q+1}\,.$$

2) Ecrire les valeurs de a_n, pour n compris entre 0 et 9.
3) Montrer que si $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n} \leq a_n \leq n\,.$$

En déduire le rayon de convergence R de la série de terme général $a_n x^n$.
4) Montrer que l'ensemble des valeurs de a_n est l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs et que ces nombres apparaissent chacun une infinité de fois.
5) Soit (b_n) la suite extraite de (a_n) contenant chaque nombre rationnel strictement positif une fois et une seule, obtenu lors de sa première apparition dans la suite (a_n).
Quel est le rayon de convergence R' de la série de terme général $b_n x^n$? La série converge-t-elle si $x = \pm R'$?

1) La suite $(u_p)_{p\geq 0}$ définie par

$$u_p = \frac{p(p+1)}{2} = \sum_{r=0}^{p} r$$

est une suite strictement croissante de nombres entiers dont le premier terme est nul. Si n est un entier strictement positif, il existe p unique tel que

$$u_p \leq n \leq u_{p+1} - 1\,.$$

Si l'on pose

$$q = n - u_p\,,$$

on a

$$0 \leq q \leq u_{p+1} - 1 - u_p = p\,.$$

On a donc bien

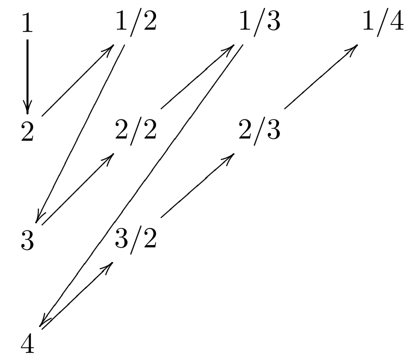
$$n = \frac{p(p+1)}{2} + q$$

avec

$$0 \leq q \leq p\,,$$

et il n'y a qu'un seul couple possible.

2) Ecrire la suite des nombres a_n revient à parcourir le tableau suivant



donc

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 2 \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = 3 \quad a_4 = 1 \quad a_5 = \frac{1}{3} \quad a_6 = 4 \quad a_7 = \frac{3}{2} \quad a_8 = \frac{2}{3} \quad a_9 = \frac{1}{4}\,.$$

3) Si $q \geq 1$, on a

$$a_n = \frac{p+1-q}{q+1} \leq \frac{p}{2} \leq \frac{p(p+1)}{2} + q = n\,,$$

et si $q = 0$ et $p \geq 2$

$$a_n = p+1 \leq \frac{p(p+1)}{2} + q = n\,.$$

On obtient ainsi toutes les valeurs de $n \geq 2$.

Puisque si $n \geq 1$, on a $p \geq 1$, on obtient aussi

$$p+1-q \geq 1 \quad \text{et} \quad \frac{p(p+1)}{2} \geq 1\,,$$

et donc

$$a_n = \frac{p+1-q}{q+1} \geq \frac{1}{q+1} \geq \frac{1}{\frac{p(p+1)}{2} + q} = \frac{1}{n}\,.$$

Comme les séries de termes généraux n et $1/n$ sont de rayon 1, on en déduit que $R = 1$.

4) Soit P/Q un nombre rationnel tel que P et Q soient strictement positifs. Soit λ un entier naturel strictement positif. L'égalité

$$\frac{p+1-q}{q+1} = \frac{\lambda P}{\lambda Q}$$

a lieu en particulier lorsque

$$\begin{cases} p+1-q = \lambda P \\ q+1 = \lambda Q \end{cases}$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{l} p=\lambda P+\lambda Q-2 \\ q=\lambda Q-1 \end{array}\right. .$$

Ce couple (p,q) provient de

$$n_\lambda = \frac{(\lambda P+\lambda Q-1)(\lambda P+\lambda Q-2)}{2}+\lambda Q-1\,,$$

qui est bien tel que

$$0\leq q=\lambda Q-1\leq \lambda Q-1+\lambda P-1=p\,.$$

Donc, quel que soit λ,

$$n_\lambda=\frac{P}{Q}\,.$$

L'ensemble des valeurs de a_n est l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs et ces nombres apparaissent chacun une infinité de fois.

5) Si (a_{n_k}) est une suite extraite de (a_n) contenant les nombres rationnels positifs une fois et une seule, la suite (a_{n_k}) n'est pas bornée. Il en résulte que $R'\leq 1$ et que la série diverge si $x=\pm R'$.

Les premiers termes de la suite sont

$$b_0=1 \quad b_1=2 \quad b_2=\frac{1}{2} \quad b_3=3 \quad b_4=\frac{1}{3} \quad b_5=4 \quad b_6=\frac{3}{2} \quad b_7=\frac{2}{3} \quad b_8=\frac{1}{4} \quad b_9=5\,.$$

On montre que, pour $n\geq 2$, on a encore

$$b_n\leq n\,.$$

Pour cela, soit $(r_n)_{n\geq 1}$ la suite strictement croissante de nombres entiers tels que

$$b_{r_n}=n\,.$$

On a

$$r_1=0\;,\; r_2=1\;,\; r_3=3\;,\; r_4=5\;,\; r_5=9\,.$$

On montre, par récurrence sur n, que, pour tout entier $n\geq 3$, on a, pour tout entier s vérifiant $2\leq s\leq r_n$, l'inégalité

$$b_s\leq s\,.$$

La propriété est vraie si $n=3$, car

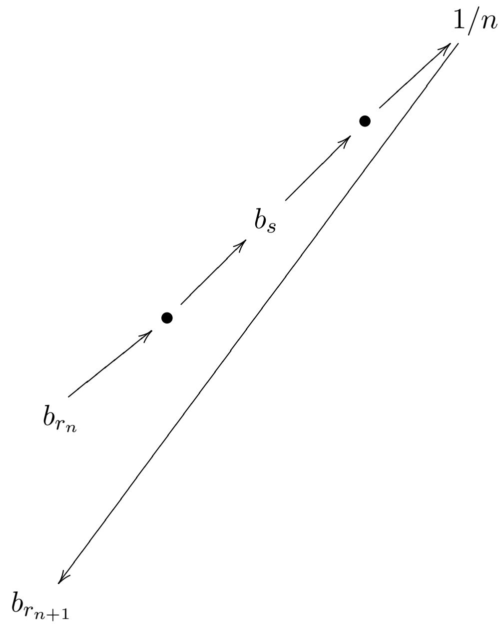
$$b_{r_3}=b_3=3 \quad \text{et} \quad b_2=\frac{1}{2}\leq 2\,.$$

Supposons la propriété vraie à l'ordre n. Lorsque

$$r_n\leq s\leq r_{n+1}-1\,,$$

le nombre b_s est de la forme

$$b_s=\frac{b_{r_n}-q_s}{q_s+1}=\frac{n-q_s}{q_s+1} \quad \text{où} \quad 0\leq q_s\leq b_{r_n}-1\,.$$



Donc
$$b_s \leq b_{r_n} \leq r_n \leq s\,.$$
D'autre part
$$b_{r_{n+1}} = n+1 = b_{r_n} + 1 \leq r_n + 1 \leq r_{n+1}\,.$$
La propriété est donc vraie à l'ordre $n+1$. Elle est donc vraie pour tout entier $n \geq 3$.

Il en résulte que, pour $n \geq 2$, on a bien
$$b_n \leq n\,,$$
et il résulte de cette inégalité que $R' \geq 1$. Finalement $R' = 1$.

Chapitre 2

SOMMATION DE SÉRIES ENTIÈRES

2.1 Série de l'exponentielle

Calculer la somme de la série entière suivante pour tout nombre **complexe** z

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + n^2 + n + 1}{n!} z^n .$$

On décompose le polynôme

$$P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$$

dans la base (L_0, L_1, L_2, L_3) constituée des polynômes

$$L_1(X) = 1$$

et, si $p \geq 1$,

$$L_p(X) = X(X-1)\cdots(X-p+1) .$$

Il existe des nombres α, β, γ, δ tels que

$$X^3 + X^2 + X + 1 = \alpha + \beta X + \gamma X(X-1) + \delta X(X-1)(X-2) .$$

En donnant à X les valeurs 0, 1 et 2 successivement on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 4 \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma = 15 \end{cases} ,$$

d'où l'on tire

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 3, 4) .$$

Quant à δ, c'est le coefficient du terme dominant de P, donc $\delta = 1$. Alors, pour tout entier naturel n,

$$n^3 + n^2 + n + 1 = n(n-1)(n-2) + 4n(n-1) + 3n + 1 .$$

On en déduit

$$S(z) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}\, z^n + 4\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!}\, z^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}\, z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n\,,$$

et, en simplifiant,

$$S(z) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^n}{(n-3)!} + 4\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{(n-2)!} + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,,$$

et finalement

$$S(z) = z^3\sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^{n-3}}{(n-3)!} + 4z^2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{(n-2)!} + 3z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = (z^3+4z^2+3z+1)e^z\,.$$

Toutes les séries entières apparaissant dans le calcul précédent sont de rayon infini. La somme est donc valable pour tout z complexe.

Calculer la somme de la série entière suivante pour tout nombre **complexe** z

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} n\, \frac{z^{2n}}{n!}\,.$$

En écrivant

$$\operatorname{ch} n = \frac{e^n + e^{-n}}{2}\,,$$

on a

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2}\, \frac{z^{2n}}{n!}\,,$$

donc

$$S(z) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ez^2)^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{-1}z^2)^n}{n!}\right)\,,$$

et finalement

$$S(z) = \frac{1}{2}\left[\left(e^{ez^2} - 1\right) + \left(e^{z^2/e} - 1\right)\right]\,,$$

ou encore

$$S(z) = \frac{1}{2}\left(e^{ez^2} + e^{z^2/e}\right) - 1\,.$$

Toutes les séries entières apparaissant dans le calcul précédent sont de rayon infini. La somme est donc valable pour tout z complexe.

Calculer la somme de la série entière suivante pour tout nombre **complexe** z

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sh} n \, \frac{z^{2n}}{(2n)!} .$$

En écrivant

$$\operatorname{sh} n = \frac{e^n - e^{-n}}{2} ,$$

on a

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{2} \frac{z^{2n}}{(2n)!} ,$$

donc

$$S(z) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n z^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n} z^{2n}}{(2n)!} \right) ,$$

et finalement

$$S(z) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ch}(z\sqrt{e}) - \operatorname{ch} \frac{z}{\sqrt{e}} \right) .$$

Toutes les séries entières apparaissant dans le calcul précédent sont de rayon infini. La somme est donc valable pour tout z complexe.

Calculer la somme de la série entière suivante pour tout nombre réel x

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} .$$

Si $x \geq 0$,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} \sqrt{x} - 1 .$$

Si $x \leq 0$,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cos \sqrt{-x} - 1 .$$

Toutes les séries entières apparaissant dans le calcul précédent sont de rayon infini. La somme est donc valable pour tout x réel.

Déterminer le rayon de convergence R, puis calculer pour tout x réel la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}\,,$$

en montrant que, pour tout x réel,

$$S''(x) + S'(x) + S(x) = e^x\,,$$

en en résolvant cette équation différentielle.

Pour tout x réel, en appliquant le critère d'Alembert à la série numérique de terme général

$$u_n(x) = \frac{x^{3n}}{(3n)!}\,,$$

on obtient

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{|x|^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\,,$$

et la suite $(|u_{n+1}(x)/u_n(x)|)$ converge vers 0. La série de terme général $u_n(x)$ est donc absolument convergente et la série entière a un rayon de convergence infini. Il en résulte que la fonction S est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On a

$$S(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

et l'on obtient

$$S'(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

puis

$$S''(x) = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots\,.$$

Dans ces trois séries apparaissent tous les termes de la série de e^x. On a alors pour tout x réel,

$$S''(x) + S'(x) + S(x) = e^x\,.$$

Donc S est solution de l'équation différentielle linéaire

$$\text{(E)} \qquad y'' + y' + y = e^x\,,$$

avec de plus $S(0) = 1$ et $S'(0) = 0$.

Le polynôme caractéristique de (E) vaut $X^2 + X + 1$ et a pour racines complexes $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$. Les solutions réelles de l'équation homogène sont donc de la forme

$$y(x) = e^{-x/2}\left(A\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + B\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\,,$$

où A et B sont deux nombres réels, et $e^x/3$ est une solution particulière de (E). Donc

$$S(x) = e^{-x/2}\left(A\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + B\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{e^x}{3}\,.$$

On a

$$S(0) = 1 = A + \frac{1}{3}\,,$$

donc $A = 2/3$, et en dérivant

$$S'(x) = e^{-x/2}\left[-\frac{1}{2}\left(A\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + B\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-A\sin\frac{x\sqrt{3}}{2} + B\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right] + \frac{e^x}{3}\,.$$

On en tire

$$S'(0) = 0 = -\frac{A}{2} + \sqrt{3}\,\frac{B}{2} + \frac{1}{3}\,,$$

d'où $B = 0$. Finalement

$$S(x) = \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-x/2}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\,.$$

Calculer la somme de la série entière suivante pour tout nombre **complexe** z

$$S_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+k}}{(3n+k)!}\,,$$

où $k \in \{0, 1, 2\}$. (Si j est une racine cubique de l'unité, on calculera tout d'abord la somme $1 + j^p + j^{2p}$ pour tout entier p).
Vérifier que

$$S_0(z) + S_1(z) + S_2(z) = e^z$$

et que, si $k = 1$ ou $k = 2$, on a, pour tout x réel,

$$S'_k(x) = S_{k-1}(x)\,.$$

En partant du fait que j vérifie

$$j^2 + j + 1 = 0 \quad \text{et} \quad j^3 = 1\,,$$

on en déduit que,

si $p = 3q$

$$j^{2p} + j^p + 1 = j^{6q} + j^{3q} + 1 = 3\,,$$

si $p = 3q + 1$

$$j^{2p} + j^p + 1 = j^{6q+2} + j^{3q+1} + 1 = j^2 + j + 1 = 0\,,$$

si $p = 3q + 2$

$$j^{2p} + j^p + 1 = j^{3(2q+1)+1} + j^{3q+2} + 1 = j + j^2 + 1 = 0\,.$$

Fixons k dans $\{0, 1, 2\}$. Alors, si $p = 3n + k$, on a

$$1 + j^{p-k} + j^{2(p-k)} = 3\,,$$

et si $p = 3n + k + 1$ ou $p = 3n + k + 2$,

$$1 + j^{p-k} + j^{2(p-k)} = 0\,.$$

On en déduit que

$$\sum_{p=0}^{\infty}(1 + j^{p-k} + j^{2(p-k)})\frac{z^p}{p!} = 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n+k}}{(3n+k)!}\,.$$

Mais, puisque $1/j = j^2$,

$$\sum_{p=0}^{\infty}(1 + j^{p-k} + j^{2(p-k)})\frac{z^p}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{z^p}{p!} + \sum_{p=0}^{\infty} j^{2k}\frac{(jz)^p}{p!} + \sum_{p=0}^{\infty} j^k\frac{(j^2z)^p}{p!}\,,$$

ce qui donne

$$\sum_{p=0}^{\infty}(1 + j^{p-k} + j^{2(p-k)})\frac{z^p}{p!} = e^z + j^{2k}e^{jz} + j^k e^{j^2z}\,.$$

Donc

$$S_k(z) = \frac{1}{3}\,(e^z + j^{2k}e^{jz} + j^k e^{j^2z})\,.$$

Toutes les séries entières étant de rayon infini, ces calculs sont valables pour tout z complexe.

On peut exprimer les séries selon les valeurs de k, en prenant

$$j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad j^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\,,$$

on obtient les résultats suivants.

Si $k = 0$,

$$\begin{aligned} S_0(z) &= \frac{1}{3}\,[e^z + e^{jz} + e^{j^2z}] \\ &= \frac{1}{3}\,[e^z + e^{-z/2}(e^{iz\sqrt{3}/2} + e^{-iz\sqrt{3}/2})] \\ &= \frac{1}{3}\left[e^z + 2e^{-z/2}\cos\frac{z\sqrt{3}}{2}\right]. \end{aligned}$$

Si $k = 1$,

$$\begin{aligned}
S_1(z) &= \frac{1}{3}\left[e^z + j^2 e^{jz} + j e^{j^2 z}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[e^z - \frac{e^{-z/2}}{2}\left((1+i\sqrt{3})\left(\cos\frac{z\sqrt{3}}{2} + i\sin\frac{z\sqrt{3}}{2}\right) + (1-i\sqrt{3})\left(\cos\frac{z\sqrt{3}}{2} - i\sin\frac{z\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[e^z - e^{-z/2}\left(\cos\frac{z\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{z\sqrt{3}}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Si $k = 2$,

$$\begin{aligned}
S_2(z) &= \frac{1}{3}\left[e^z + j e^{jz} + j^2 e^{j^2 z}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[e^z - \frac{e^{-z/2}}{2}\left((1-i\sqrt{3})\left(\cos\frac{z\sqrt{3}}{2} + i\sin\frac{z\sqrt{3}}{2}\right) + (1+i\sqrt{3})\left(\cos\frac{z\sqrt{3}}{2} - i\sin\frac{z\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[e^z - e^{-z/2}\left(\cos\frac{z\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{z\sqrt{3}}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

On constate que

$$S_0(z) + S_1(z) + S_2(z) = e^z .$$

D'autre part on vérifie facilement que

$$S_1' = S_0 \quad \text{et} \quad S_2' = S_1 .$$

Calculer la somme de la série entière suivante pour tout nombre **complexe** z

$$S_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+k}}{(4n+k)!},$$

où $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.
En déduire la somme de la série entière suivante pour tout nombre **complexe** z

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n}}{(4n)!}.$$

En additionnant les séries entières des fonctions cosinus et cosinus hyperbolique, on fait disparaître les termes d'indice de la forme $4n+2$, et l'on obtient deux fois ceux de la forme $4n$. On a alors

$$S_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} z + \cos z).$$

On peut obtenir les autres fonctions de la même manière en combinant les cosinus ou les sinus, ou encore, en prenant des primitives successives nulles en zéro. On trouve ainsi

$$S_1(z) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} z + \sin z) \quad , \quad S_2(z) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} z - \cos z) \quad , \quad S_3(z) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} z - \sin z)\,.$$

Puisque l'on a

$$(e^{i\pi/4})^{4n} = (-1)^n\,,$$

on peut écrire

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{i\pi/4}z)^{4n}}{(4n)!}\,,$$

et donc

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(ze^{i\pi/4}) + \cos(ze^{i\pi/4})] \\ &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}\left((1+i)\frac{z\sqrt{2}}{2}\right) + \cos\left((1+i)\frac{z\sqrt{2}}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Alors en utilisant les relations

$$\cos(a+ib) = \cos a \operatorname{ch} b - i \sin a \operatorname{sh} b \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(a+ib) = \operatorname{ch} a \cos b + i \operatorname{sh} a \sin b\,,$$

on trouve

$$S(z) = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{z\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}\frac{z\sqrt{2}}{2} - i\sin\frac{z\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh}\frac{z\sqrt{2}}{2} + \cos\frac{z\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}\frac{z\sqrt{2}}{2} + i\sin\frac{z\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh}\frac{z\sqrt{2}}{2}\right],$$

et finalement

$$S(z) = \cos\frac{z\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}\frac{z\sqrt{2}}{2}\,.$$

Toutes ces séries entières étant de rayon infini, ces calculs sont valables pour tout z complexe.

Soit α et β deux nombres réels. Calculer la somme des séries entières suivantes pour tout nombre **complexe** z

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha+\beta)}{n!}\, z^n \quad \text{et} \quad T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha+\beta)}{n!}\, z^n\,.$$

On calcule

$$U_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n\alpha+\beta)}\,\frac{z^n}{n!} = e^{i\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ze^{i\alpha})^n}{n!}\,,$$

donc

$$U_{\alpha,\beta}(z) = e^{i\beta}\, e^{ze^{i\alpha}} = e^{i\beta}\, e^{z\cos\alpha + iz\sin\alpha} = e^{z\cos\alpha} e^{i(\beta+z\sin\alpha)}\,.$$

Alors

$$S(z) = \frac{1}{2}\,(U_{\alpha,\beta}(z) + U_{-\alpha,-\beta}(z)) = e^{z\cos\alpha}\cos(\beta + z\sin\alpha)\,,$$

et

$$T(z) = \frac{1}{2i}\,(U_{\alpha,\beta}(z) - U_{-\alpha,-\beta}(z)) = e^{z\cos\alpha}\sin(\beta + z\sin\alpha)\,.$$

Toutes ces séries entières étant de rayon infini, ces calculs sont valables pour tout z complexe.

1) Calculer la somme des séries entières suivantes pour tout nombre **complexe** z

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n \frac{z^n}{n!} \quad \text{et} \quad T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-i)^n \frac{z^n}{n!}\,.$$

2) En déduire le développement en série entière de $e^z\cos z$, $e^z\sin z$, $\operatorname{ch} z\cos z$, $\operatorname{ch} z\sin z$, $\operatorname{sh} z\cos z$, $\operatorname{sh} z\sin z$.

3) En déduire, lorsque $k \in \{0,1,2,3\}$, la somme de la série

$$S_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n+k}}{(4n+k)!}\,.$$

4) Montrer que pour tout entier naturel n

$$\frac{(\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}}{n!} = \sum_{0\le 2k+1\le n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-2k-1)!}\,.$$

1) On a, pour tout nombre z complexe,

$$S(z) = e^{(1+i)z} = e^z(\cos z + i\sin z)\,.$$

2) Si l'on écrit,

$$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}\,,$$

on obtient donc

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} e^{in\pi/4}\, \frac{z^n}{n!}\,.$$

et de même,

$$T(z) = e^{(1-i)z} = e^z(\cos z - i\sin z)\,,$$

s'écrit

$$T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} e^{-in\pi/4}\, \frac{z^n}{n!}\,.$$

Alors, puisque

$$e^z \cos z = \frac{1}{2}(S(z) + T(z)) \quad \text{et} \quad e^z \sin z = \frac{1}{2i}(S(z) - T(z))\,,$$

on obtient

$$e^z \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4} \frac{z^n}{n!} \quad \text{et} \quad e^z \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4} \frac{z^n}{n!}\,.$$

On a donc également

$$e^{-z} \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4} \frac{z^n}{n!} \quad \text{et} \quad e^{-z} \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4} \frac{z^n}{n!}\,.$$

Alors

$$\operatorname{ch} z \cos z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2} 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4} \frac{z^n}{n!}\,.$$

Mais

$$\frac{1 + (-1)^n}{2} \cos \frac{n\pi}{4} = 0$$

pour tout entier n non multiple de 4, et vaut $(-1)^p$ si $n = 4p$. Donc

$$\operatorname{ch} z \cos z = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p 2^{2p} \frac{z^{4p}}{(4p)!}\,.$$

De même

$$\operatorname{sh} z \sin z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2} 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4} \frac{z^n}{n!}\,.$$

Mais

$$\frac{1 + (-1)^n}{2} \sin \frac{n\pi}{4} = 0$$

pour tout entier n qui n'est pas de la forme $4p + 2$, et vaut $(-1)^p$ si $n = 4p + 2$. Donc

$$\operatorname{sh} z \sin z = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p 2^{2p+1} \frac{z^{4p+2}}{(4p+2)!}\,.$$

Ensuite

$$\operatorname{sh} z \cos z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2} 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4} \frac{z^n}{n!}\,.$$

Les coefficients de la série sont nuls si n est pair. Donc

$$\operatorname{sh} z \cos z = \sum_{p=0}^{\infty} 2^p \sqrt{2} \cos \frac{(2p+1)\pi}{4} \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}\,.$$

Mais

$$\sqrt{2} \cos \frac{(2p+1)\pi}{4} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{p\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\,,$$

et en développant

$$\sqrt{2}\cos\frac{(2p+1)\pi}{4} = \cos\frac{p\pi}{2} - \sin\frac{p\pi}{2}\,.$$

Alors

$$\operatorname{sh} z\cos z = \sum_{p=0}^{\infty} 2^p \cos\frac{p\pi}{2}\,\frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!} - \sum_{p=0}^{\infty} 2^p \sin\frac{p\pi}{2}\,\frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}\,.$$

Les termes de la première série sont nuls sauf si $p = 2s$, et ceux de la seconde sauf si $p = 2s+1$, d'où finalement

$$\operatorname{sh} z\cos z = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s 2^{2s}\,\frac{z^{4s+1}}{(4s+1)!} - \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s 2^{2s+1}\,\frac{z^{4s+3}}{(4s+3)!}\,.$$

Pour finir, en remarquant que

$$\sin z\operatorname{ch} z = \frac{1}{i}\,\operatorname{sh}(iz)\cos(iz)\,,$$

on obtient

$$\sin z\operatorname{ch} z = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s 2^{2s}\,\frac{z^{4s+1}}{(4s+1)!} + \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s 2^{2s+1}\,\frac{z^{4s+3}}{(4s+3)!}\,.$$

En particulier on déduit de ce qui précède les sommes :

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s 2^{2s}\,\frac{z^{4s+1}}{(4s+1)!} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch} z\sin z + \operatorname{sh} z\cos z\right),$$

et

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s 2^{2s+1}\,\frac{z^{4s+3}}{(4s+3)!} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch} z\sin z - \operatorname{sh} z\cos z\right).$$

3) Par changement de variable, on déduit immédiatement

$$S_0(z) = \cos\frac{z\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}\frac{z\sqrt{2}}{2}\,,$$

$$S_1(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\operatorname{ch}\frac{z\sqrt{2}}{2}\sin\frac{z\sqrt{2}}{2} + \operatorname{sh}\frac{z\sqrt{2}}{2}\cos\frac{z\sqrt{2}}{2}\right],$$

$$S_2(z) = \sin\frac{z\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh}\frac{z\sqrt{2}}{2}\,,$$

$$S_3(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\operatorname{ch}\frac{z\sqrt{2}}{2}\sin\frac{z\sqrt{2}}{2} - \operatorname{sh}\frac{z\sqrt{2}}{2}\cos\frac{z\sqrt{2}}{2}\right].$$

Ces formules peuvent d'ailleurs se déduire de la première par dérivation, car

$$S_0' = S_3\ ,\ S_3' = S_2\ ,\ S_2' = S_1\,.$$

4) Appliquons la formule du produit de Cauchy à $e^z \sin z$. Si l'on note a_n le coefficient de la série de $\sin z$, le coefficient b_n de z^n dans le produit est alors

$$b_n = \sum_{p=0}^{n} a_p \frac{1}{(n-p)!}\,.$$

Mais a_p est nul si p est pair et

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,.$$

On obtient donc

$$b_n = \sum_{0\leq 2k+1\leq n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-2k-1)!}\,.$$

Mais on a obtenu dans 2)

$$b_n = \frac{2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}\,,$$

ce qui donne l'égalité désirée.

2.2 Série du binôme

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout x de $]-R,\, R[$, la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n\,.$$

Que se passe-t-il si $|x| = R$?

En écrivant

$$S(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\,,$$

on voit apparaître la série dérivée de la série géométrique de coefficients 1. Cette série étant de rayon 1, on a $R = 1$, et

$$S(x) = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

Pour $x = \pm 1$ le terme général de la série (nx^n) ne converge pas vers 0, donc la série diverge.

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout x de $]-R,\, R[$, la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n .$$

La somme $S(x)$ n'est autre que le produit de Cauchy de deux séries de rayon 1. Pour tout x de $]-1,\, 1[$ on a

$$S(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x} .$$

En particulier, on a $R \geq 1$. On remarque que

$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = +\infty ,$$

ce qui ne serait pas possible si on avait $R > 1$, car la série entière est continue sur $]-R,\, R[$. Il en résulte alors que $R = 1$.

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout x de $[-R,\, R]$, la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} .$$

Si l'on pose

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} ,$$

on a

$$a_n \sim \frac{1}{n^2} ,$$

et

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+2}{n} ,$$

tend vers $R = 1$. De plus la série converge absolument si $|x| = 1$ par comparaison à une série de Riemann.

En décomposant la fraction en éléments simples, on obtient

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} .$$

Or les séries entières de coefficients $1/n$ et $1/(n+1)$ sont de rayon 1, donc, si $|x| < 1$,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} .$$

Alors, si $x \neq 0$,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\,.$$

et donc

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= -\ln(1-x) - \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x\right) \\ &= 1 - \frac{x-1}{x}\ln(1-x)\,. \end{aligned}$$

Par ailleurs $S(0) = 0$.

Il résulte du théorème d'Abel que le résultat précédent est encore valable en 1 et en -1, et donc

$$S(1) = \lim_{x\to 1^-} S(x) = 1 \quad \text{et} \quad S(-1) = \lim_{x\to -1^+} S(x) = 1 - 2\ln 2\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout x de $[-R,\, R]$, la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4n^2-1}\,.$$

Posons

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{4n^2-1}\,.$$

On a

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{4n^2-1}{4(n+1)^2-1}\, x^2\,,$$

et ceci tend vers x^2. Donc la série converge absolument si $x^2 < 1$, et ne converge pas absolument si $x^2 > 1$. La série entière est donc de rayon 1.

D'autre part, si $|x| = 1$, on a

$$\left|(-1)^n \frac{x^{2n}}{4n-1}\right| = \frac{1}{4n^2-1} \sim \frac{1}{4n^2}\,,$$

et il en résulte que la série converge absolument par comparaison à une série de Riemann.

En décomposant la fraction en éléments simples, on obtient

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\,.$$

La série de terme général $(-1)^n x^{2n}/(2n-1)$ et celle de terme général $(-1)^n x^{2n}/(2n+1)$ sont de rayon 1, donc, si $|x|<1$,

$$S(x)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}\right).$$

Alors, si $x\neq 0$,

$$S(x)=\frac{1}{2}\left(-1+x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{2n-1}-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right),$$

et donc

$$\begin{aligned}S(x) &= \frac{1}{2}\left(-1-x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-1-x\arctan x-\frac{1}{x}\arctan x\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2+1}{x}\arctan x\right).\end{aligned}$$

Par ailleurs $S(0)=-1$.

Il résulte du théorème d'Abel que le résultat précédent est encore valable en 1 et en -1, et donc

$$S(1)=S(-1)=\lim_{x\to 1}S(x)=-\frac{1}{2}\left(1+2\arctan 1\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout x de $[-R,\,R]$, la somme

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Posons

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}.$$

On a

$$a_n\sim\frac{1}{2n^3}.$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1$$

est le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^{n+1}$. Donc, en remplaçant x par x^2, la série entière de terme général $a_n x^{2n+2}$ est aussi de rayon 1. De plus la série converge absolument si $|x| = 1$.

On décompose en éléments simples la fraction rationnelle

$$f(X) = \frac{1}{X(X+1)(2X+1)}$$

sous la forme

$$f(X) = \frac{A}{X} + \frac{B}{X+1} + \frac{C}{2X+1}\,.$$

En multipliant par X et en remplaçant X par 0, on obtient $A = 1$.
En multipliant par $X+1$ et en remplaçant X par -1 on trouve $B = 1$.
En multipliant par $2X+1$ et en remplaçant X par $-1/2$ on trouve $C = -4$. Alors

$$a_n = f(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}\,.$$

Puisque toutes les séries entières utilisées dans le calcul suivant ont un rayon de convergence égal à 1, on a, lorsque x appartient à $]-1,\,1[$,

$$\begin{aligned} S(x) &= x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2)^{n+1}}{n+1} - 4x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n} - 4x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,. \end{aligned}$$

Les deux premières sommes font apparaître la série de $-\ln(1-u)$ avec $u = x^2$. Pour la troisième, on part de

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) - 1\,,$$

et, en prenant la primitive nulle en 0, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - x\,.$$

Alors

$$\begin{aligned} S(x) &= -x^2\ln(1-x^2) + (-\ln(1-x^2) - x^2) - \left(2x\ln\frac{1+x}{1-x} - 4x^2\right) \\ &= 3x^2 - (x^2+1)\ln(1-x^2) - 2x\ln\frac{1+x}{1-x}\,, \end{aligned}$$

ce que l'on peut encore écrire

$$S(x) = 3x^2 - (1-x)^2\ln(1-x) - (1+x)^2\ln(1+x)\,.$$

D'après le théorème d'Abel, en en raison de la parité de S, on a

$$S(1) = S(-1) = \lim_{x\to 1^-} (3x^2 - (1-x)^2 \ln(1-x) - (1+x)^2 \ln(1+x)) = 3 - 4\ln 2\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}\,.$$

Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Posons

$$a_n = \frac{1}{2n-1}\,.$$

On a

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+1}{2n-1}\,,$$

et cette suite converge vers $R = 1$.

Si $|x| < 1$, étudions tout d'abord la série

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

On obtient en dérivant

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)\,,$$

et donc, en prenant la primitive nulle en 0,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,.$$

Pour $0 \le x < 1$, on écrit

$$\begin{aligned} S(x) &= -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}^{\,2n}}{2n-1} = -1 + \sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}^{\,2n-1}}{2n-1} \\ &= -1 + \sqrt{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}^{\,2n+1}}{2n+1} = -1 + \frac{\sqrt{x}}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,. \end{aligned}$$

Pour $-1 < x \leq 0$, on écrit

$$\begin{aligned} S(x) &= -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{-x}^{2n}}{2n-1} = -1 - \sqrt{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sqrt{-x}^{2n-1}}{2n-1} \\ &= -1 - \sqrt{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{-x}^{2n+1}}{2n+1} = -1 - \sqrt{-x} \arctan \sqrt{-x}\,. \end{aligned}$$

Si $x = 1$, on a

$$a_n x^n \sim \frac{1}{2n}\,,$$

et la série diverge.

Si $x = -1$, la suite $(1/(2n-1))$ est décroissante et converge vers 0, et la série est alternée : elle converge donc. Alors d'après le théorème d'Abel, on a

$$S(-1) = \lim_{x \to -1} S(x) = -1 - \arctan 1 = -1 - \frac{\pi}{4}\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n\,.$$

Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Posons

$$a_n = \frac{n}{n+1}\,.$$

On a $a_n \sim 1$ et la série a même rayon de convergence que la série géométrique de rayon 1. Donc $R = 1$, et le terme général ne converge pas vers 0, donc la série diverge si $|x| = 1$.

On écrit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n\,.$$

Alors, puisque les séries sont de rayon 1, on a, si $|x| < 1$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}\,.$$

Ou encore, si $x \neq 0$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\,,$$

et finalement

$$S(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x}\,,$$

avec de plus $S(0) = 0$.

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + n + 1)x^n\,.$$

Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Posons

$$a_n = n^2 + n + 1\,.$$

Comme $a_n \sim n^2$, on a

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \sim \frac{n^2}{(n+1)^2}\,,$$

et ceci converge vers $R = 1$. De plus si $|x| = 1$, le terme général ne converge pas vers 0, donc la série diverge.

On décompose le polynôme

$$P(X) = X^2 + X + 1$$

dans la base (L_0, L_1, L_2) constituée des polynômes

$$L_0(X) = 1$$

et, si $p \geq 1$,

$$L_p(X) = X(X-1)\cdots(X-p+1)\,.$$

Il existe des nombres α, β, γ tels que

$$X^2 + X + 1 = \alpha + \beta X + \gamma X(X-1)\,.$$

En donnant à X les valeurs 0 et 1 successivement on obtient

$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \alpha + \beta = 3\,.$$

Le nombre γ est le coefficient du terme dominant et vaut donc 1. On a alors

$$n^2 + n + 1 = n(n-1) + 2n + 1\,.$$

Puisque toutes les séries sont de rayon 1, on a si $|x| < 1$,

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,,$$

c'est-à-dire

$$S(x) = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \,.$$

Si l'on pose

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,,$$

on a

$$T'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}\,,$$

puis

$$T''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}\,,$$

d'où

$$S(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}\,,$$

et finalement

$$S(x) = \frac{1+x^2}{(1-x)^3}\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}\,.$$

Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Posons

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}\,.$$

Comme

$$a_n \sim \frac{1}{n^3}\,,$$

on a

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \sim \frac{(n+1)^3}{n^3}\,,$$

et ceci converge vers $R = 1$. De plus si $|x| = 1$, la série converge absolument par comparaison à une série de Riemann.

On décompose en éléments simples la fraction rationnelle

$$f(X) = \frac{1}{X(X-1)(X-2)}$$

sous la forme
$$f(X) = \frac{A}{X} + \frac{B}{X-1} + \frac{C}{X-2}\,.$$
En multipliant par X et en remplaçant X par 0 on trouve $A = 1/2$.
En multipliant par $X-1$ et en remplaçant X par 1 on trouve $B = -1$.
En multipliant par $X-2$ et en remplaçant X par 2 on trouve $C = 1/2$.

On obtient donc
$$a_n = f(n) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2(n-2)}\,.$$
Or les séries entières de coefficients $1/n$, $1/(n-1)$ et $1/(n-2)$ sont de rayon 1. Alors si $|x| < 1$,
$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{2n} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{2(n-2)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^2}{2}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n-2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,. \end{aligned}$$
On obtient
$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right) - x(-\ln(1-x) - x) + \frac{x^2}{2}(-\ln(1-x)) \\ &= -\frac{1}{2}(x-1)^2\ln(1-x) + \frac{3x^2}{4} - \frac{x}{2}\,. \end{aligned}$$
En 1 et -1 la série converge d'après le théorème d'Abel. On a
$$S(1) = \lim_{x\to 1} S(x) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad S(-1) = \lim_{x\to -1} S(x) = -2\ln 2 + \frac{5}{4}\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme
$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}\, x^n\,.$$
Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Posons
$$a_n = \frac{n}{n^2-1}\,.$$
On a
$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{n(n^2+2n)}{(n+1)(n^2-1)}\,,$$

et ceci tend vers $R = 1$.

En décomposant la fraction en éléments simples, on obtient

$$\frac{n}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right).$$

Or les séries entières de coefficients $1/(n-1)$ et $1/(n+1)$ sont de rayon 1, donc, si $|x| < 1$,

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}\right).$$

Alors, si $x \neq 0$,

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(x\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right),$$

et donc

$$\begin{aligned}
S(x) &= \frac{1}{2}\left(x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{x}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[-x\ln(1-x) + \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right)\right]\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x}\ln(1-x) + 1 + \frac{x}{2}\right).
\end{aligned}$$

Par ailleurs $S(0) = 0$.

Etudions maintenant ce qui se passe au bord de l'intervalle de convergence.

Si $x = 1$, on a

$$\frac{n}{n^2-1}\,x^n = \frac{n}{n^2-1} \sim \frac{1}{n},$$

et il en résulte que la série diverge.

Si $x = -1$, on a

$$\frac{n}{n^2-1}\,x^n = (-1)^n\frac{n}{n^2-1}.$$

Puisque

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right),$$

la suite (a_n) décroit et converge vers 0, comme somme de deux suites décroissantes qui convergent vers 0. Alors la série de terme général $(-1)^n a_n$ est alternée. Elle converge, et il résulte du théorème d'Abel que l'on a

$$S(-1) = \lim_{x\to-1} S(x) = -\frac{1}{2}\left(-2\ln 2 + 1 - \frac{1}{2}\right) = \ln 2 - \frac{1}{4}.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\, x^n\,.$$

Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Posons

$$a_n = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\,.$$

Comme (a_n) converge vers 1, la série à même rayon que la série géométrique de terme général x^n. On a donc $R = 1$. De plus, si $|x| = 1$, le terme général de la série ne converge pas vers 0 et la série diverge.

On décompose en éléments simples la fraction rationnelle

$$f(X) = \frac{X^2}{(X-1)(X-2)}$$

sous la forme

$$f(X) = A + \frac{B}{X-1} + \frac{C}{X-2}\,.$$

En multipliant par $X - 1$ et en remplaçant X par 1 on trouve $B = -1$
En multipliant par $X - 2$ et en remplaçant X par 2 on trouve $C = 4$
Enfin A est le rapport des termes de plus haut degré, donc $A = 1$. Finalement

$$a_n = f(n) = 1 - \frac{1}{n-1} + \frac{4}{n-2}\,.$$

Or les séries de coefficients 1, $1/(n-1)$ et $1/(n-2)$ sont de rayon 1, donc, si $|x| < 1$,

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=3}^{\infty} x^n - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} + 4 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-2} \\
&= \frac{x^3}{1-x} - x \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} + 4x^2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n-2} \\
&= \frac{x^3}{1-x} - x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} + 4x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\
&= \frac{x^3}{1-x} - x(-\ln(1-x) - x) + 4x^2(-\ln(1-x)) \\
&= \frac{x^2}{1-x} + x(1-4x)\ln(1-x)\,.
\end{aligned}$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n-1}\, x^{n-1}\,.$$

Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Comme

$$\frac{2n+1}{2n-1} \sim 1\,,$$

la série a le même rayon de convergence que la série géométrique de terme général x^n, donc $R = 1$. De plus le terme général ne tend pas vers 0 si $|x| = 1$ et la série diverge dans ce cas.

En décomposant la fraction en éléments simples, on obtient

$$\frac{2n+1}{2n-1} = 1 + \frac{2}{2n-1}\,.$$

Or les séries entières de coefficients 1 et $1/(2n-1)$ sont de rayon 1, donc si $|x| < 1$,

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2n-1} \\ &= \frac{1}{1-x} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}\,. \end{aligned}$$

Partons de

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)\,.$$

En prenant la primitive nulle en 0 on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,.$$

Si $0 < x < 1$, on a

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{1-x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,, \end{aligned}$$

et si $-1 < x < 0$, on a cette fois

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{1-x} + \frac{2}{\sqrt{-x}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{1-x} + \frac{2}{\sqrt{-x}} \arctan \sqrt{-x}\,. \end{aligned}$$

Enfin $S(0) = 3$.

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}\, x^n\,.$$

Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Si l'on pose

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}\,,$$

on a

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{n+3}{n+2}\,,$$

et donc la suite $(|a_n|/|a_{n+1}|)$ converge vers $R = 1$.

En changeant d'indice de sommation, on a

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\, x^{n-2}\,,$$

donc, si x appartient à $]-1,\,0[\,\cup\,]\,0,\,1\,[$,

$$S(x) = -\frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n\,.$$

On reconnaît alors la série dont la somme est $\ln(1+x)$ à laquelle il manque le terme de rang 1

$$S(x) = -\frac{1}{x^2}\,(\ln(1+x) - x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}\,.$$

On a aussi

$$S(0) = a_0 = \frac{1}{2}\,.$$

Enfin, si $x = 1$, la série de terme général $(-1)^n/(n+2)$ converge d'après le critère de Leibniz, et il résulte du théorème d'Abel que

$$S(1) = \lim_{x \to 1^-} S(x) = 1 - \ln 2\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)(2n+2)}, .$$
Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Le rayon de la série entière de terme général $\dfrac{(-1)^n x^n}{(2n+1)(2n+2)}$ vaut R^2.
Si l'on pose
$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$
on a
$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(2n+3)(2n+4)}{(2n+1)(2n+2)}.$$
La suite $(|a_n/a_{n+1}|)$ converge vers le rapport des termes de plus haut degré, donc vers $R^2 = 1$. Il en résulte que le rayon de convergence cherché vaut $R = 1$.

On calcule tout d'abord la somme de la série entière en décomposant en éléments simples. On a
$$\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$
On en déduit
$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+2}. \end{aligned}$$
et, comme les séries du membre de droite sont de rayon 1, ce calcul est valable pour $|x| < 1$.

Pour x dans $]-1, 1[\setminus\{0\}$, on a tout d'abord
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\arctan x}{x}.$$
D'autre part
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+2} = \frac{1}{2x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{n+1}}{n+1} = \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2},$$
et finalement
$$S(x) = \frac{\arctan x}{x} - \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}.$$

De plus
$$S(0) = \frac{1}{2}\,.$$
Pour $x = \pm 1$, la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ converge absolument puisque
$$|a_n| = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim \frac{1}{4n^2}\,,$$
et que la série de terme général $1/n^2$ est une série de Riemann convergente.

On peut alors appliquer le théorème d'Abel. On a
$$S(1) = S(-1) = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R et pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ calculer, de deux manières différentes, la somme
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{3}\, x^n\,.$$
Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Pour $n \geq 0$, posons
$$a_n = \sin\frac{n\pi}{3}\,.$$
On a
$$|a_n| \leq 1\,.$$
Donc le rayon R de la série entière de coefficient a_n est supérieur à celui de la série géométrique qui vaut 1. D'autre part
$$a_{3n+1} = (-1)^n \sin\frac{\pi}{3}\,,$$
et la suite (a_{3n+1}) ne converge pas vers 0, donc la suite (a_n) non plus. Il en résulte que l'on a $R \leq 1$. Finalement on obtient $R = 1$, et si $x = \pm 1$ la série diverge.

Première méthode de sommation

On écrit
$$a_n = \mathrm{Im}(e^{in\pi/3})\,.$$
Or la série de terme général $e^{in\pi/3}x^n$ est une série géométrique de rayon 1, et donc, si $|x| < 1$,
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{in\pi/3} x^n = \frac{1}{1 - e^{i\pi/3}x}\,.$$

Alors
$$S(x) = \operatorname{Im} \frac{1}{1 - e^{i\pi/3}x} = \operatorname{Im} \frac{1 - e^{-i\pi/3}x}{(1 - e^{i\pi/3}x)(1 - e^{-i\pi/3}x)},$$
ce qui donne finalement
$$S(x) = \frac{x \sin(\pi/3)}{x^2 - 2x\cos(\pi/3) + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{x}{x^2 - x + 1}.$$

Deuxième méthode de sommation

On remarque que
$$a_{3k} = 0 \quad \text{et} \quad a_{3k+1} = a_{3k+2} = (-1)^k \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Alors
$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{3p+2} a_n x^n &= \sum_{k=0}^{p} a_{3k} x^{3k} + \sum_{k=0}^{p} a_{3k+1} x^{3k+1} + \sum_{k=0}^{p} a_{3k+2} x^{3k+2} \\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{\sqrt{3}}{2} (x^{3k+1} + x^{3k+2}) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} (x + x^2) \sum_{k=0}^{p} (-1)^k x^{3k}.
\end{aligned}$$
Donc en faisant tendre p vers l'infini
$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} (x + x^2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{3k}.$$
On reconnaît une série géométrique, et l'on obtient
$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{x + x^2}{1 + x^3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{x}{x^2 - x + 1}.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre **complexe** z tel que $|z| < R$ la somme
$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{ch} n \, z^n.$$
Que se passe-t-il si $|z| = R$?

On a
$$\operatorname{ch} n \sim \frac{e^n}{2},$$

et la série géométrique de terme général $e^n z^n$ est de rayon $1/e$. Donc $R = 1/e$. Par ailleurs si $|z| = 1/e$, la suite $(\operatorname{ch} n\, z^n)$ ne converge pas vers 0 donc la série de terme général $\operatorname{ch} n\, z^n$ diverge.

On écrit
$$S(z) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(ez)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{e}\right)^n\right),$$
la première série est de rayon $1/e$ et la seconde de rayon e. On retrouve que $R = 1/e$. Donc si $|z| < 1/e$, on obtient
$$S(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ez} + \frac{1}{1-z/e}\right),$$
ce qui donne
$$S(z) = \frac{1 - z\operatorname{ch} 1}{1 - 2z\operatorname{ch} 1 + z^2}.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{n}.$$

Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Posons
$$u_n(x) = \frac{x^{4n-1}}{n}.$$
On a
$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{n}{n+1}\,x^4,$$
et cette suite converge vers x^4. La série de terme général $u_n(x)$ converge absolument si $x^4 < 1$ et ne converge pas absolument si $x^4 > 1$, donc $R = 1$.

On a $S(0) = 0$ et si $0 < |x| < 1$,
$$S(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^4)^n}{n} = -\frac{1}{x}\ln(1 - x^4).$$

Lorsque $x = \pm 1$, le terme général de la série vaut x/n, et la série diverge.

> Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme
> $$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}\,.$$
> Que se passe-t-il si $|x| = R$?

La série dérivée est de rayon 1, donc la série proposée également. On a, si $|x| < 1$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}\,,$$

que l'on décompose en éléments simples. On a tout d'abord

$$S'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)$$

puis

$$S'(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2}\right)\,.$$

Alors, en prenant la primitive nulle en 0, on obtient, si $|x| < 1$,

$$S(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\arctan x\,.$$

Lorsque $x = \pm 1$, le terme général de la série vaut

$$\frac{x}{4n+1} \sim \frac{x}{4n}\,,$$

et la série diverge.

> Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme
> $$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1}\,.$$
> Que se passe-t-il si $|x| = R$?

La série dérivée est de rayon 1, donc la série proposée également. On a, si $|x| < 1$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} = \frac{1}{1+x^4}\,.$$

En remarquant que

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2\,,$$

on a donc la factorisation

$$x^4+1=(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)\,,$$

ce qui, compte tenu de la parité de la fonction, permet d'obtenir une décomposition en éléments simples de la forme :

$$S'(x)=\frac{ax+b}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{-ax+b}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,.$$

On obtient facilement, par identification par exemple,

$$S'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{-x+\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)\,.$$

On écrit encore, en faisant apparaître la dérivée des dénominateurs,

$$S'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\,\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\,\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)\,.$$

Alors, en prenant la primitive nulle en 0, on obtient si $|x|<1$,

$$S(x)=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}(\arctan(x\sqrt{2}-1)+\arctan(x\sqrt{2}+1))\,.$$

Lorsque $x=\pm1$, la suite $(1/(4n+1))$ décroît et converge vers 0, et la série est alternée et converge donc. Alors d'après le théorème d'Abel,

$$S(1)=S(-1)=\lim_{x\to1}S(x)=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{4}\,(\arctan(\sqrt{2}-1)+\arctan(\sqrt{2}+1))\,.$$

Mais

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}\,,$$

donc

$$\arctan(\sqrt{2}-1)+\arctan(\sqrt{2}+1)=\frac{\pi}{2}\,,$$

et

$$\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2\,,$$

donc

$$\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=2\ln(\sqrt{2}+1)\,.$$

Finalement

$$S(1)=S(-1)=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}+1)+\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3n+1}\,.$$
Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Etudions tous d'abord la série
$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}\,.$$
Sa série dérivée est de rayon 1, donc la série également. On a, si $|x| < 1$,
$$T'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \frac{1}{1-x^3}\,,$$
que l'on décompose en éléments simples sous la forme
$$T'(x) = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{1+x+x^2}\,.$$
En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on obtient le système
$$\left\{\begin{array}{l} A+C=1 \\ A+B-C=0 \\ A-B=0 \end{array}\right. \quad ,$$
d'où
$$A = B = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad C = \frac{2}{3}\,.$$
On a donc
$$T'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{x+2}{1+x+x^2}\right)\,.$$
On fait apparaître la dérivée du dénominateur
$$T'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\,\frac{2x+1}{1+x+x^2} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{1+x+x^2}\right)\,.$$
On obtient, si $|x| < 1$,
$$T(x) = \frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{1-x} + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\,.$$
On détermine C en tenant compte du fait que $T(0) = 0$. On obtient
$$C = -\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{\pi}{6}\,,$$

d'où
$$T(x) = \frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{1-x} + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right).$$
Revenons à S. Tout d'abord $S(0) = 1$, et si x appartient à $]-1, 1[\setminus\{0\}$, on a
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^{1/3})^{3n}}{3n+1},$$
et donc
$$S(x) = \frac{1}{x^{1/3}}\,T(x^{1/3}),$$
ce qui donne
$$S(x) = \frac{1}{x^{1/3}}\left[\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{1+x^{1/3}+x^{2/3}}}{1-x^{1/3}} + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\frac{2x^{1/3}+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right)\right].$$
Pour $x = 1$, on a
$$\frac{x^n}{3n+1} \sim \frac{1}{3n}$$
et la série diverge.

Par contre si $x = -1$, la suite $(1/(3n+1))$ décroît et converge vers 0, et la série est alternée et converge donc. D'après le théorème d'Abel on a
$$S(-1) = \lim_{x\to -1} S(x) = -\left[\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\frac{-1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 n\, x^n.$$

On a l'encadrement
$$0 \leq \sin^2 n \leq 1.$$
Puisque la série géométrique de terme général x^n est de rayon 1, la série entière de terme général $\sin^2 nx^n$ est de rayon supérieur ou égal à 1. La série converge donc si $|x| < 1$.

En écrivant
$$\sin^2 n = \frac{1-\cos 2n}{2} = \frac{2 - e^{2ni} - e^{-2ni}}{4},$$

les séries entières de termes généraux x^n, $e^{2ni}x^n$ et $e^{-2ni}x^n$ sont toutes de rayon 1, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sin^2 n\, x^n = \frac{1}{4}\left(2\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} e^{2ni}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2ni}x^n\right).$$

Pour x dans $]-1,\,1[$ on a donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 n\, x^n &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{1-x} - \frac{1}{1-xe^{2i}} - \frac{1}{1-xe^{-2i}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{1-x} - \frac{2-xe^{2i}-xe^{-2i}}{x^2+1-x(e^{2i}+e^{-2i})}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1-x\cos 2}{x^2-2x\cos 2+1}\right).
\end{aligned}$$

De plus, la somme obtenue a une limite infinie lorsque x tend vers 1. Il en résulte que l'on a $R = 1$.

Soit α et β deux nombres réels. Calculer pour tout nombre **complexe** z tel que $|z| < 1$ les sommes

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\alpha+\beta)z^n \quad \text{et} \quad T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n\alpha+\beta)z^n\,.$$

Considérons la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{(n\alpha+\beta)i}z^n = e^{\beta i}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{\alpha i}z)^n\,,$$

qui converge si

$$|e^{\alpha i}z| = |z| < 1\,.$$

On a alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{(n\alpha+\beta)i}z^n = \frac{e^{\beta i}}{1-e^{\alpha i}z}\,.$$

On en déduit

$$S(z) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n\alpha+\beta)}z^n + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(n\alpha+\beta)}z^n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i\beta}}{1-e^{i\alpha}z} + \frac{e^{-i\beta}}{1-e^{-i\alpha}z}\right),$$

et, en réduisant au même dénominateur,

$$S(z) = \frac{\cos\beta - z\cos(\beta-\alpha)}{1-2z\cos\alpha+z^2}\,.$$

De même

$$T(z) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n\alpha+\beta)}z^n - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(n\alpha+\beta)}z^n\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{i\beta}}{1-e^{i\alpha}z} - \frac{e^{-i\beta}}{1-e^{-i\alpha}z}\right),$$

ce qui donne
$$T(z) = \frac{\sin\beta - z\sin(\beta-\alpha)}{1 - 2z\cos\alpha + z^2}\,.$$

> Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme
> $$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n-1)}{n}\, x^n\,.$$

La série entière dérivée est
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n-1)x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\, x^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (e^i x)^n\right)\,.$$
La série converge si $|x| < 1$ et l'on a
$$S'(x) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{1 - e^i x} = \frac{1 - x\cos 1}{x^2 - 2x\cos 1 + 1}\,.$$
Comme le terme général ne tend pas vers 0 si $x = 1$, cette série est de rayon 1, donc S également.

Si l'on fait apparaître la dérivée du dénominateur, on a
$$S'(x) = -\frac{\cos 1}{2}\,\frac{2x - 2\cos 1}{x^2 - 2x\cos 1 + 1} + \frac{\sin^2 1}{x^2 - 2x\cos 1 + 1}\,.$$
On obtient donc
$$S(x) = -\frac{\cos 1}{2}\,\ln(x^2 - 2x\cos 1 + 1) + \sin 1\ \arctan\frac{x - \cos 1}{\sin 1} + C\,.$$
La constante C est déterminée en remarquant que $S(0) = 0$. Donc
$$0 = C - \sin 1 \arctan\frac{\cos 1}{\sin 1}\,,$$
c'est-à-dire
$$C = \sin 1\ \arctan\frac{1}{\tan 1}\,,$$
mais, si $u > 0$,
$$\arctan u + \arctan\frac{1}{u} = \frac{\pi}{2}\,,$$
et, par ailleurs, le nombre 1 appartient à l'intervalle $\,]\,0,\,\pi/2\,[\,$, donc
$$\arctan\frac{1}{\tan 1} = \frac{\pi}{2} - \arctan\tan 1 = \frac{\pi}{2} - 1\,.$$

Finalement

$$S(x) = -\frac{\cos 1}{2}\ \ln(x^2 - 2x\cos 1 + 1) + \sin 1\ \left[\arctan\frac{x-\cos 1}{\sin 1} + \frac{\pi}{2} - 1\right].$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n .$$

(On pourra calculer d'abord le produit $(1+x)S(x)$).
Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Posons

$$a_n = (-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

On a

$$|a_n| \leq n .$$

Comme la série de coefficient n est de rayon 1, on en déduit que $R \geq 1$. D'autre part la série harmonique diverge, donc la suite $(|a_n|)$ tend vers l'infini. Il en résulte que si $|x| = 1$ la série entière diverge. Donc $R \leq 1$ et on en déduit que $R = 1$.

Si $|x| < 1$, on a

$$\begin{aligned}
(1+x)S(x) &= S(x) + xS(x)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n - \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) x^n .
\end{aligned}$$

En regroupant les termes des deux dernières séries, il reste

$$(1+x)S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = \ln(1+x),$$

donc

$$S(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}\,.$$
Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Posons
$$a_n = (n+1)^2\,.$$
On a
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}\,,$$
et cette suite converge vers $R = 1$. De plus, si $|x| = 1$ le terme général ne tend pas vers 0, donc la série diverge. Si $|x| < 1$, on écrit
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\,.$$
Posons, si $|x| < 1$,
$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,.$$
On a alors
$$S(x) = T''(x) - T'(x) = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2}\,,$$
et finalement
$$S(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\, x^{2n}\,.$$
Que se passe-t-il si $|x| = R$?

On pose
$$u_n(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\, x^{2n}\,,$$
on obtient
$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{2(2n+3)}{n+1}\, x^2\,,$$

et la suite $(u_{n+1}(x)/u_n(x))$ converge vers $4x^2$. La série de terme général $u_n(x)$ converge absolument si $4x^2 < 1$, donc si $|x| < 1/2$, et ne converge pas absolument si $4x^2 > 1$, donc si $|x| > 1/2$. Il en résulte que cette série entière a pour rayon $1/2$.

En simplifiant par $n!$, on obtient

$$u_n(x) = \frac{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}{n!}\, 2^n x^{2n}\,,$$

ce que l'on peut encore écrire, en divisant par 2^n,

$$u_n(x) = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}}{n!}\, 4^n x^{2n}\,.$$

On peut alors faire apparaître la série du binôme,

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!}\, 4^n x^{2n}\,.$$

Donc, si $|x| < 1/2$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = (1-4x^2)^{-3/2}\,.$$

Comme la fonction obtenue tend vers l'infini lorsque x tend vers $\pm 1/2$, la série ne peut converger pour ces valeurs d'après le théorème d'Abel.

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{3n+2}\,.$$

Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Etudions tous d'abord la série

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}\,.$$

Sa série dérivée est de rayon 1, donc la série également. On a, si $|x| < 1$,

$$T'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1} = \frac{x}{1-x^3}\,,$$

que l'on décompose en éléments simples sous la forme

$$T'(x) = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{1+x+x^2}\,.$$

En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on obtient le système

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B-C=1 \\ A-B=0 \end{cases},$$

d'où

$$A=B=\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad C=-\frac{1}{3}.$$

On a donc

$$T'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x-1}{1+x+x^2}\right).$$

On fait apparaître la dérivée du dénominateur

$$T'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\,\frac{2x+1}{1+x+x^2}-\frac{3}{2}\,\frac{1}{1+x+x^2}\right).$$

On obtient si $|x|<1$,

$$T(x)=\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{1-x}-\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

On détermine C en tenant compte du fait que $T(0)=0$. On obtient

$$C=\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{\pi}{6},$$

d'où

$$T(x)=\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{1-x}-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}\right).$$

Revenons à S. On a $S(0)=0$ et, si x appartient à $]-1,\,1[\setminus\{0\}$, on écrit

$$S(x)=\frac{1}{x^{1/3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^{\frac{2}{3}})^{3n+2}}{3n+2}=\frac{1}{x^{1/3}}\,T(x^{2/3}).$$

Si $|x|=1$, on obtient la série de terme général $-1/(3n+1)$ qui diverge.

2.3 Séries mixtes

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre complexe x tel que $|x|<R$ la somme

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n}.$$

Que se passe-t-il si $|x|=R$?

Posons

$$a_n = \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}\,.$$

On a

$$2 \leq 3+(-1)^n \leq 4\,,$$

donc

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{2^n}\,.$$

La série entière de coefficient $1/2^n$ est de rayon 2. Donc $R \geq 2$. D'autre part si $|x| = 2$, et si $n = 2p+1$ est impair

$$a_{2p+1}x^{2p+1} = \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1}\,,$$

La suite $(a_{2p+1}x^{2p+1})$ ne converge pas vers 0. Donc la suite $(a_n x^n)$ non plus et la série de terme général $a_n x^n$ diverge. Il en résulte que $R \leq 2$. On a donc $R = 2$.

On aurait pu également regarder les séries des termes de rang pair et de rang impair. D'ailleurs pour le calcul de la somme, on écrit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}}\,,$$

Les deux séries sont géométriques, et donc

$$S(x) = \frac{1}{1-\frac{x^2}{16}} + \frac{x}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{16}{16-x^2} + \frac{2x}{4-x^2}\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre complexe x tel que $|x| < R$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,,$$

dont le coefficient a_n vaut 1, si $n = 4k$ ou $n = 4k+1$, et vaut -1 si $n = 4k+2$ ou $4k+3$. Que se passe-t-il si $|x| = R$?

On a $|a_n| = 1$, donc la série est de rayon 1, et pour $x = \pm 1$, le terme général de la série ne converge pas vers 0, donc la série diverge. En écrivant

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{4k} + \sum_{k=0}^{\infty} x^{4k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} x^{4k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} x^{4k+3}\,,$$

les quatre séries sont de rayon 1, et si $|x| < 1$, on trouve

$$S(x) = \frac{1}{1-x^4} + \frac{x}{1-x^4} - \frac{x^2}{1-x^4} - \frac{x^3}{1-x^4} = \frac{1+x-x^2-x^3}{1-x^4}\,.$$

Mais le numérateur se factorise sous la forme

$$1+x-x^2-x^3=(1+x)(1-x^2)\,,$$

d'où

$$S(x)=\frac{1+x}{1+x^2}\,.$$

Soit la série entière de coefficient

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,.$$

Trouver son rayon de convergence R, puis calculer pour tout nombre réel x tel que $|x|<R$, la somme $S(x)$ de la série.

La suite (a_n) converge vers e. Il en résulte que la série entière de terme général a_nx^n a le même rayon de convergence que celui de la série géométrique de terme général ex^n, donc $R=1$. On reconnaît dans la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)x^n$$

le produit de Cauchy des séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n$. Donc si $|x|<1$, on a

$$S(x)=\frac{e^x}{1-x}\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x|<R$ la somme

$$S(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2+(n-2)!}{n!}\,x^n\,.$$

Que se passe-t-il si $|x|=R$?

Posons

$$a_n=\frac{2+(n-2)!}{n!}\,.$$

On a

$$a_n=\frac{2}{n!}+\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n^2}\,\frac{n}{n-1}\left(1+\frac{2}{(n-2)!}\right)\,,$$

donc
$$a_n \sim \frac{1}{n^2}\,.$$
Alors
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \sim \frac{(n+1)^2}{n^2}\,,$$
et cette suite converge vers $R = 1$. De plus la série converge absolument si $|x| \leq 1$ par comparaison à une série de Riemann.

On peut dire également que la série est la somme de la série de coefficients $2/n!$ qui est de rayon infini, et de la série de coefficients $1/(n(n-1))$ qui est de rayon 1. Elle a donc pour rayon $R = \inf(1, \infty) = 1$.

Alors, si $|x| < 1$,
$$S(x) = 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}\,.$$
Puis en décomposant en éléments simples
$$S(x) = 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,,$$
et enfin
$$S(x) = 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + x\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,.$$
Finalement
$$S(x) = 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + x\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,.$$
Alors
$$S(x) = 2\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right) + x(-\ln(1-x) - x) - \left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right)\,,$$
ce qui donne
$$S(x) = (1-x)\ln(1-x) + 2e^x - \frac{3x^2}{2} - x - 2\,.$$
De plus, d'après le théorème d'Abel,
$$S(-1) = \lim_{x\to -1} S(x) = 2\ln 2 + \frac{2}{e} - \frac{5}{2}\,,$$
et
$$S(1) = \lim_{x\to 1} S(x) = 2e - \frac{9}{2}\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + (-2)^n\right) x^n .$$

Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Posons

$$a_n = (-2)^n + \frac{1}{n} = (-2)^n \left(1 + \frac{(-1)^n}{n2^n}\right) \sim (-2)^n .$$

Comme la série entière de coefficient $(-2)^n$ est de rayon $1/2$, on a donc $R = 1/2$. Par ailleurs si $|x| = 1/2$, la suite $(a_n x^n)$ ne converge pas vers 0 donc la série de terme général $a_n x^n$ diverge.

On écrit

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-2x)^n .$$

La première série est de rayon 1, et la seconde de rayon $1/2$. On retrouve que $R = 1/2$. Donc si $|x| < 1/2$, on obtient

$$S(x) = -\ln(1-x) - \frac{2x}{1+2x} .$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(-2)^n}\right) x^n .$$

Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Posons

$$a_n = 1 + \frac{1}{n(-2)^n} .$$

La suite (a_n) converge vers 1, donc la série de terme général a_n a même rayon de convergence que la série géométrique de coefficient 1. On a donc $R = 1$.

Alors, si $|x| < 1$,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(-2)^n} ,$$

ou encore

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \frac{x}{1-x} - \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) .$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + (-1)^n \right) x^n \,.$$

Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Posons

$$a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n \,.$$

On a

$$|a_n| = \left| 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right|$$

et cette suite converge vers 1, donc la série de terme général a_n a même rayon de convergence que la série géométrique de coefficient 1. On a donc $R = 1$. De plus, pour $|x| = 1$ le terme général ne tend pas vers 0, et la série diverge.

On a la somme de deux séries entières de rayon 1, et pour $|x| < 1$, on peut écrire

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n \,,$$

d'où

$$S(x) = -\ln(1 - x) - \frac{x}{1 + x} \,.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} + n(-1)^n \right) x^n \,.$$

Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Posons

$$a_n = \frac{2}{n} + n(-1)^n \,.$$

On a

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{n}{n+1} \left| \frac{1 + \frac{2(-1)^n}{n^2}}{1 + \frac{2(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}} \right| \,,$$

et cette suite converge vers $R = 1$. Comme $|a_n x^n|$ ne tend pas vers 0 si $|x| = 1$, la série ne converge pas dans ce cas.

Pour $|x| < 1$, on peut écrire

$$S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x\sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n-1}.$$

Comme la série de terme général nx^{n-1} est la dérivée de la série géométrique, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

d'où

$$S(x) = -2\ln(1-x) - \frac{x}{(1+x)^2}.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{(-1)^n n}}{n} x^n.$$

Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Cherchons tout d'abord le rayon de convergence de la série dérivée

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n n} x^{n-1}$$

en séparant les parties paires et impaires. Ce rayon est aussi R.

La partie paire

$$\sum_{p=1}^{\infty} 2^{2p} x^{2p-1} = 4x\sum_{p=1}^{\infty} (4x^2)^{p-1}$$

est une série géométrique de raison $4x^2$ qui converge si et seulement si $4x^2 < 1$. Son rayon de convergence est donc $1/2$.

La partie impaire

$$\sum_{p=0}^{\infty} 2^{-(2p+1)} x^{2p} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{4}\right)^p$$

est une série géométrique de raison $x^2/4$ qui converge si et seulement si $x^2/4 < 1$. Son rayon de convergence est donc 2.

Alors la série entière $S'(x)$ est de rayon $R = \min(1/2, 2) = 1/2$.

On peut calculer $S'(x)$ si $|x| < 1/2$. On obtient

$$S'(x) = \frac{4x}{1-4x^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{4x}{1-4x^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{2}} + \frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right).$$

On obtient la valeur de $S(x)$ lorsque $|x| < 1/2$ en cherchant la primitive de $S'(x)$ nulle en 0. On obtient donc

$$S(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-4x^2) + \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{x}{2}\right)\right).$$

La partie paire de S vaut

$$S_P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2n}\, x^{2n}$$

et lorsque $|x| = 1/2$, le terme général vaut $1/(2n)$. Cette série diverge donc. Par contre la partie impaire converge lorsque $|x| = 1/2$ puisque le rayon de convergence vaut 2. Il en résulte que la série $S(x)$ converge si et seulement si $|x| < 1/2$.

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}\, x^n.$$

Que se passe-t-il si $|x| = R$?

Puisque

$$0 \leq n^{(-1)^n} \leq n,$$

le rayon de convergence de la série proposée est supérieur à celui de la série de terme général nx^n qui vaut 1. Par ailleurs, si $x = 1$ la suite $(n^{(-1)^n})$ n'est pas bornée, donc $R \leq 1$. Il en résulte que $R = 1$.

Pour calculer $S(x)$, on sépare les parties paires et impaires.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

et comme les séries entières de termes généraux $2nx^{2n-1}$ et $x^{2n+1}/(2n+1)$ sont respectivement série dérivée et primitive de la série de terme général x^{2n} qui est une série entière de rayon 1, elles sont aussi de rayon 1.

Soit x dans $]-1,\, 1[$. Posons
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}\,.$$
Alors
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n} = x\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1} = xf'(x) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}\,,$$
et
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,.$$
Donc, pour tout x de $]-1,\, 1[$, on a
$$S(x) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,.$$
Pour $x = \pm 1$ le terme général de la série ne tend pas vers 0, donc elle diverge.

2.4 Séries diverses

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite périodique de période T vérifiant pour tout $n \geq 0$
$$a_{n+T} = a_n\,.$$
Calculer le rayon de convergence R et, pour x dans $]-R,\, R[$, la somme
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
de la série entière de coefficients a_n.

On suppose la suite (a_n) non nulle, sinon $S(x) = 0$.

La suite (a_n) étant bornée, le rayon de convergence de la série de coefficients a_n est supérieur à celui de la série de coefficients 1, donc $R \geq 1$. Par ailleurs la suite (a_n) ne converge pas vers 0 sinon elle serait nulle, donc $R \leq 1$. Il en résulte que $R = 1$.

On écrit, si $|x| < 1$,
$$S(x) = \sum_{n=0}^{T-1} a_n x^n + \sum_{n=T}^{\infty} a_n x^n\,,$$

puis, en changeant d'indice de sommation

$$S(x) = \sum_{n=0}^{T-1} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+T} x^{n+T} .$$

Alors, en utilisant la périodicité

$$S(x) = \sum_{n=0}^{T-1} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+T} = \sum_{n=0}^{T-1} a_n x^n + x^T \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ,$$

et finalement

$$S(x) = \sum_{n=0}^{T-1} a_n x^n + x^T S(x) ,$$

ce qui donne

$$S(x) = \frac{\sum\limits_{n=0}^{T-1} a_n x^n}{1 - x^T} .$$

Soit $P(x) = x^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 à coefficients complexes. Soit une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifiant, pour tout $n \geq 0$, la relation

$$a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0 ,$$

avec a_0 et a_1 non tous les deux nuls.
Calculer en fonction de P, a_0 et a_1, la somme $S(x)$ de la série entière de coefficients a_n et préciser le rayon de convergence de cette série.

Si $n \geq 2$, on a

$$a_n = -ba_{n-1} - ca_{n-2} ,$$

donc la suite est une suite récurrente linéaire. Si l'on appelle λ_1 et λ_2 les racines de P, on sait que, si λ_1 est distinct de λ_2, la suite (a_n) est une combinaison linéaire de suites géométriques. On a

$$a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n .$$

La série entière de terme général $a_n x^n$ possède alors un rayon de convergence supérieur à $\min(1/|\lambda_1|, 1/\lambda_2|)$.

D'autre part, si $\lambda_1 = \lambda_2$ on a

$$a_n = (\alpha_1 + n\alpha_2)\lambda_1^n$$

et de nouveau le rayon de convergence est non nul. Il est supérieur à $1/|\lambda_1|$.

Plutôt que d'utiliser les expressions de a_n précédentes, on va utiliser la relation de récurrence pour calculer $S(x)$.

Si $|x| < R$, on a

$$S(x) = a_0 + a_1x + \sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n\,,$$

donc

$$\begin{aligned} S(x) &= a_0 + a_1x - \sum_{n=2}^{\infty}(ba_{n-1} + ca_{n-2})x^n \\ &= a_0 + a_1x - bx\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} - cx^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} \\ &= a_0 + a_1x - bx\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n - cx^2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\,. \end{aligned}$$

On voit réapparaître la somme $S(x)$, et l'on obtient

$$S(x) = a_0 + a_1x - bx(S(x) - a_0) - cx^2S(x)\,,$$

c'est-à-dire

$$S(x) = \frac{a_0 + x(a_1 + ba_0)}{1 + bx + cx^2}\,.$$

Si c est non nul, le dénominateur de cette fraction a pour racines $1/\lambda_1$ et $1/\lambda_2$. Si ces valeurs sont distinctes, et si numérateur et dénominateur n'ont pas de racine commune, la fraction rationnelle $S(x)$ se décompose en éléments simples sous la forme

$$S(x) = \frac{\mu_1}{1 - \lambda_1x} + \frac{\mu_2}{1 - \lambda_2x}\,.$$

On en déduit que la valeur du rayon de convergence est dans ce cas

$$R = \min\left\{\frac{1}{|\lambda_1|}, \frac{1}{|\lambda_2|}\right\}\,.$$

Si la racine du numérateur et aussi racine du dénominateur, par exemple si

$$-\frac{a_1 + ba_0}{a_0} = \lambda_1\,,$$

alors

$$R = \frac{1}{|\lambda_2|}\,.$$

Lorsque c est nul et b ne l'est pas, on peut poser $\lambda_2 = 0$. Alors, dans le cas général

$$R = \frac{1}{|\lambda_1|} = \frac{1}{|b|}\,,$$

sauf si

$$-\frac{a_1 + b a_0}{a_0} = \lambda_1 .$$

Dans ce cas, comme dans celui ou $b = c = 0$, la série est un polynôme, donc de rayon infini.

Soit α un nombre réel.

1) Trouver le rayon de convergence des séries entières de coefficients $\dfrac{\cos(n\alpha)}{n}$ et $\dfrac{\sin(n\alpha)}{n}$.

2) Lorsque $|x| < 1$, calculer la somme

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \cos(n\alpha) .$$

3) Montrer que pour $|x| < 1$ on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \sin(n\alpha) = \arctan\left(\frac{x \sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}\right) .$$

1) Les deux séries ont même rayon de convergence que leur série dérivée dont les termes généraux sont respectivement

$$\cos((n+1)\alpha)x^n \quad \text{et} \quad \sin((n+1)\alpha)x^n .$$

Puisque

$$|\cos((n+1)\alpha)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |\sin((n+1)\alpha)| \leq 1 ,$$

on obtient, dans les deux cas, que la série est de rayon supérieur ou égal à 1.

De l'égalité

$$\cos(2(n+1)\alpha) = 2\cos^2((n+1)\alpha) - 1 ,$$

on déduit que la suite $(\cos((n+1)\alpha))$ ne peut converger vers 0. La série de terme général $x^n \cos((n+1)\alpha)$ est donc de rayon 1, ainsi que la série de terme général $\dfrac{x^n \cos(n\alpha)}{n}$.

De l'égalité

$$\sin((n+1)\alpha) = \sin(n\alpha)\cos\alpha + \cos(n\alpha)\sin\alpha ,$$

on déduit que si la suite $(\sin(n\alpha))$ converge vers 0, alors la suite $(\cos(n\alpha)\sin\alpha)$ converge vers 0, et puisque la suite $(\cos(n\alpha))$ ne converge pas vers 0, c'est que $\sin\alpha$ est nul, c'est-à-dire que α est multiple entier de π.

Réciproquement si $\alpha = k\pi$ avec k entier, alors la suite $(\sin(n+1)\alpha)$ est la suite nulle.

La série entière de terme général $\dfrac{x^n}{n}\sin(n\alpha)$ est de rayon 1 lorsque α n'est pas un multiple entier de π et est de rayon infini sinon.

2) Lorsque $|x|<1$, on peut calculer la somme des deux séries simultanément en posant

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^n\,\frac{e^{in\alpha}}{n}\,.$$

On obtient en dérivant

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n+1)\alpha}x^n=\frac{e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}x}=\frac{e^{i\alpha}(1-e^{-i\alpha}x)}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{e^{i\alpha}-x}{1-2x\cos\alpha+x^2}\,.$$

Donc

$$f'(x)=\frac{\cos\alpha-x}{1-2x\cos\alpha+x^2}+i\,\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\,.$$

Alors A est la primitive nulle en 0 de $\operatorname{Re} f$. Donc

$$A(x)=-\frac{1}{2}\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)\,.$$

3) Si l'on pose

$$B(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\sin(n\alpha)\,,$$

alors la fonction B est la primitive nulle en 0 de $\operatorname{Im} f$.

Or en dérivant la fonction h définie par

$$h(x)=\arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)\,,$$

qui est nulle en 0, on obtient

$$h'(x)=\operatorname{Im} f(x)\,.$$

On a donc bien

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\sin(n\alpha)=\arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)\,.$$

Soit la série entière

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)\cdots 1}\,.$$

Trouver le rayon de convergence. Trouver une équation différentielle simple vérifiée par S. En résolvant cette équation en déduire que, pour tout x réel,

$$S(x)=e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt\,.$$

Si l'on pose
$$u_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)\cdots 1}\,,$$
on a,
$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{x^2}{2n+3}\,,$$
et ceci tend vers 0. La série de terme général $u_n(x)$ converge absolument pour tout x réel, et la série entière est de rayon infini.

En dérivant
$$S'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)\cdots 1}\,,$$
donc
$$S'(x) = 1 + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdots 1} = 1 + xS(x)\,,$$
et S est solution de l'équation différentielle linéaire
$$S'(x) - xS(x) = 1\,.$$
On retrouve facilement les solutions de l'équation homogène
$$S'(x) - xS(x) = 0\,,$$
en utilisant le procédé heuristique suivant :

on écrit l'équation
$$\frac{S'(x)}{S(x)} = x\,,$$
ce qui donne en intégrant
$$\ln|S(x)| = A + \frac{x^2}{2}\,,$$
où A est une constante. Les solutions cherchées s'obtiennent en prenant l'exponentielle. On trouve
$$S(x) = Ke^{x^2/2}\,,$$
où K est une constante quelconque.

Alors, en faisant varier la constante, on cherche une solution de l'équation complète de la forme
$$S(x) = K(x)e^{x^2/2}\,.$$
Donc
$$S'(x) = K'(x)e^{x^2/2} + K(x)xe^{x^2/2}\,,$$

ce qui donne

$$K'(x)e^{x^2/2} = 1\,,$$

donc

$$K'(x) = e^{-x^2/2}\,,$$

et finalement

$$K(x) = \int_0^x e^{-t^2/2}dt + C\,,$$

où C est une constante, d'où

$$S(x) = e^{x^2/2}\left(\int_0^x e^{-t^2/2}dt + C\right)\,.$$

On détermine la constante C en remarquant que

$$S(0) = C = 0\,.$$

Finalement

$$S(x) = e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt\,.$$

Soit la série entière

$$S(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 1}x^{2n+1}\,.$$

Trouver le rayon de convergence R. Trouver une équation différentielle simple vérifiée par S. En résolvant cette équation en déduire $S(x)$ pour tout x réel tel que $|x| < R$.

Si l'on pose

$$u_n(x) = \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 1}x^{2n+1}\,,$$

on a

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{(2n+2)}{(2n+3)}\,x^2\,,$$

et ceci tend vers x^2. La série de terme général $u_n(x)$ converge absolument si $|x| < 1$, et ne converge pas absolument si $|x| > 1$. On a donc $R = 1$.

En dérivant

$$\begin{aligned}
S'(x) &= 1+2x^2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}x^{2n}\\
&= 1+2x^2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{((2n-1)+1)(2n-2)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}x^{2n}\\
&= 1+x^2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-2)\cdots 2}{(2n-3)\cdots 1}x^{2n}+x^2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-2)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}x^{2n}\\
&= 1+x^2\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-2)\cdots 2}{(2n-3)\cdots 1}x^{2n-2}\right)+x\left(x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-2)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}x^{2n-1}\right).
\end{aligned}$$

Finalement, si $|x|<1$,

$$S'(x)=1+x^2S'(x)+xS(x)\,,$$

soit

$$(1-x^2)S'(x)-xS(x)=1\,.$$

On retrouve facilement les solutions de l'équation homogène

$$(1-x^2)S'(x)-xS(x)=0\,,$$

en utilisant le procédé heuristique suivant :

on écrit l'équation

$$\frac{S'(x)}{S(x)}=\frac{x}{1-x^2}\,,$$

ce qui donne en intégrant

$$\ln|S(x)|=A-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)\,,$$

où A est une constante. Les solutions cherchées s'obtiennent en prenant l'exponentielle. On obtient

$$S(x)=\frac{K}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

où K est une constante quelconque.

Alors, en faisant varier la constante, on cherche une solution de l'équation complète de la forme

$$S(x)=\frac{K(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Donc

$$S'(x)=\frac{K'(x)}{\sqrt{1-x^2}}+x\,\frac{K(x)}{(\sqrt{1-x^2})^3}\,.$$

ce qui donne

$$(1-x^2)\frac{K'(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 1\,,$$

soit

$$K'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

On obtient

$$K(x) = \arcsin x + C\,,$$

où C est une constante, puis

$$S(x) = \frac{\arcsin x + C}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

On détermine la constante C en remarquant que

$$S(0) = C = 0\,.$$

Finalement

$$S(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Soit la série entière

$$T(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 1} x^{2n+1}\,.$$

Trouver le rayon de convergence R. Trouver une équation différentielle simple vérifiée par T. En résolvant cette équation en déduire $T(x)$ pour tout x réel tel que $|x| < R$.

Si l'on pose

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 1} x^{2n+1}\,,$$

on a,

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{(2n+2)}{(2n+3)}\, x^2\,,$$

et ceci tend vers x^2. La série de terme général $u_n(x)$ converge absolument si $|x| < 1$, et ne converge pas absolument si $|x| > 1$. On a donc $R = 1$.

En dérivant

$$\begin{aligned}
T'(x) &= 1 - 2x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1} x^{2n} \\
&= 1 - 2x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{((2n-1)+1)(2n-2)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1} x^{2n} \\
&= 1 - x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-2)\cdots 2}{(2n-3)\cdots 1} x^{2n} - x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-2)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1} x^{2n} \\
&= 1 - x^2 \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{(2n-2)\cdots 2}{(2n-3)\cdots 1} x^{2n-2}\right) \\
&\qquad - x\left(x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{(2n-2)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1} x^{2n-1}\right).
\end{aligned}$$

Finalement, si $|x| < 1$,

$$T'(x) = 1 - x^2 T'(x) - xT(x)\,,$$

soit

$$(1 + x^2)T'(x) + xT(x) = 1\,.$$

On retrouve facilement les solutions de l'équation homogène

$$(1 + x^2)T'(x) + xT(x) = 0\,,$$

en utilisant le procédé heuristique suivant :

on écrit l'équation

$$\frac{T'(x)}{T(x)} = -\frac{x}{1 + x^2}\,,$$

ce qui donne en intégrant

$$\ln|T(x)| = A - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)\,,$$

où A est une constante. Les solutions cherchées s'obtiennent en prenant l'exponentielle.

$$T(x) = \frac{K}{\sqrt{1 + x^2}}\,,$$

où K est une constante quelconque.

Alors, en faisant varier la constante, on cherche une solution de l'équation générale de la forme

$$T(x) = \frac{K(x)}{\sqrt{1 + x^2}}\,.$$

Donc

$$T'(x) = \frac{K'(x)}{\sqrt{1 + x^2}} - x\,\frac{K(x)}{(\sqrt{1 + x^2})^3}\,.$$

ce qui donne
$$(1+x^2)\frac{K'(x)}{\sqrt{1+x^2}} = 1\,,$$
soit
$$K'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$
On obtient
$$K(x) = \operatorname{argsh} x + C\,,$$
où C est une constante, puis
$$T(x) = \frac{\operatorname{argsh} x + C}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$
On détermine la constante C en remarquant que
$$T(0) = C = 0\,.$$
Finalement
$$T(x) = \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

1) Trouver le rayon de convergence R de la série entière de terme général
$$u_n(x) = \frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\,x^{2n+1}\,.$$
Pour tout x de l'intervalle $]-R,\,R[$, on pose
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\,x^{2n+1}\,.$$
2) Montrer que la fonction S est solution de l'équation différentielle
$$(E) \qquad (x^2-2)y' + xy + 2 = 0\,.$$
3) Déduire de ce qui précède une expression explicite de S.
4) La série converge-t-elle lorsque $x = R$?

1) On a
$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{n+1}{2n+3}\,x^2\,,$$
et ceci converge vers $x^2/2$. Il résulte de la règle d'Alembert pour les séries numériques que la série converge absolument si $x^2/2 < 1$, c'est-à-dire si $|x| < \sqrt{2}$, et ne converge pas absolument si $x^2/2 > 1$, c'est-à-dire si $|x| > \sqrt{2}$. On a donc $R = \sqrt{2}$.

2) Posons
$$a_n = \frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\,.$$
Pour tout x de $]-\sqrt{2},\sqrt{2}\,[$, on obtient
$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_nx^{2n}\,,$$
donc, si l'on pose
$$F(x) = (x^2-2)S'(x) + xS(x)\,,$$
on a
$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_nx^{2n+2} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_nx^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n+2}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)a_nx^{2n+2} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_nx^{2n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}2na_{n-1}x^{2n} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_nx^{2n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}2(na_{n-1}-(2n+1)a_n)x^{2n} - 2\,, \end{aligned}$$
et puisque $na_{n-1}-(2n+1)a_n$ est nul pour tout entier n, il en résulte que
$$(x^2-2)S'(x) + xS(x) = -2\,.$$
Donc S est bien solution de l'équation (E).

3) Si $|x| < \sqrt{2}$, on résout l'équation homogène en utilisant le procédé heuristique suivant :

on écrit l'équation
$$\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{x}{2-x^2}\,,$$
ce qui donne en intégrant
$$\ln|S(x)| = A - \frac{1}{2}\ln(2-x^2)\,,$$
où A est une constante. En prenant l'exponentielle on obtient
$$S(x) = \frac{K}{\sqrt{2-x^2}}\,,$$
où K est une constante quelconque.

Alors, en faisant varier la constante, on cherche une solution de l'équation complète de la forme

$$\frac{x^2-2}{\sqrt{2-x^2}}\,K'(x)=-2\,,$$

donc

$$K'(x)=\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-(x/\sqrt{2})^2}}\,,$$

et finalement

$$K(x)=2\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C\,,$$

où C est une constante.

Alors, compte-tenu du fait que $S(0)=0$, on obtient $C=0$ et finalement

$$S(x)=\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}\,\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\,.$$

4) En multipliant le numérateur et le dénominateur de a_n par $2\cdot 4\cdots(2n)=2^n n!$, on peut écrire

$$a_n=\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\,.$$

Alors, en utilisant la formule de Stirling, on obtient

$$u_n(\sqrt{2})=a_n\sqrt{2}^{\,2n+1}=\sqrt{2}\,\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}\sim\frac{\sqrt{2}}{2n}\,\frac{2^{2n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\,2n\pi}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\,2\sqrt{n\pi}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\,,$$

et la série diverge par comparaison à une série de Riemann.

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x|<R$ la somme

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\,x^n\,.$$

Posons

$$a_n=\frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\,.$$

On a

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2n+3}{n+1}\,,$$

et cette expression converge vers $R=2$.

Lorsque $|x| < 2$, cherchons une équation différentielle linéaire vérifiée par S. On remarque que, pour $n \geq 1$, on a

$$\frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)!}{1\cdot 3\cdots(2n-1)} - \frac{(n-1)!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned} S(x) &= 1 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\,x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\,x^n\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\,xS(x) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\,x^n\,. \end{aligned}$$

En dérivant cette relation, on obtient, toujours si $|x| < 2$,

$$S'(x) = \frac{1}{2}(S(x) + xS'(x)) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\,x^{n-1}\,,$$

et en multipliant par $2x$,

$$2xS'(x) = xS(x) + x^2S'(x) - (S(x)-1)\,,$$

c'est-à-dire

$$(2x-x^2)S'(x) - (x-1)S(x) = 1\,.$$

On résout l'équation homogène en utilisant le procédé heuristique suivant :

on écrit l'équation

$$\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{x-1}{x(2-x)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}\right),$$

on obtient en intégrant

$$\ln|S(x)| = -\frac{1}{2}\,\ln|x(x-2)| + A\,,$$

où A est une constante. En prenant l'exponentielle on en déduit

$$S(x) = \frac{K}{\sqrt{|x(x-2)|}}\,,$$

où K est une constante quelconque. On fait varier la constante en cherchant une solution de l'équation complète de la forme

$$S(x) = \frac{K(x)}{\sqrt{|x(x-2)|}}\,.$$

On trouve en remplaçant

$$(2x-x^2)\frac{K'(x)}{\sqrt{|x(x-2)|}} = 1\,,$$

soit
$$K'(x) = -\frac{\sqrt{|x(x-2)|}}{x(x-2)}\,.$$
Lorsque x appartient à l'intervalle $]\,0,\,2\,[$, on a
$$K'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\,,$$
et donc
$$K(x) = \arccos(1-x) + C$$
où C est une constante. Alors
$$S(x) = \frac{\arccos(1-x) + C}{\sqrt{x(2-x)}}\,.$$
Mais puisque $S(x)$ a une limite finie en 0 qui vaut 1, et que le dénominateur s'annule en 0, il doit en être de même du numérateur, donc $C = 0$.

Lorsque x appartient à l'intervalle $]\,-2,\,0\,[$, on a
$$K'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x(x-2)}} = -\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2-1}}\,,$$
et donc
$$K(x) = \operatorname{argch}(1-x) + C$$
où C est une constante, et le même argument que ci-dessus montre que $C = 0$.
Finalement
$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x(2-x)}} & \text{si } x \in\,]\,0,\,2\,[\\[2ex] 1 & \text{si } x = 0 \\[2ex] \dfrac{\operatorname{argch}(1-x)}{\sqrt{x(x-2)}} & \text{si } x \in\,]\,-2,\,0\,[\,. \end{cases}$$

Soit la série entière de coefficient
$$a_n = \int_0^1 \frac{1}{(2+t^2)^{n+1}}\,dt\,.$$

1) Si R est le rayon de convergence de la série, montrer qu'alors $R \geq 2$.
2) Lorsque $|x| < 2$, calculer la sommes partielle S_n et montrer que la suite (S_n) converge.
3) En déduire la somme $S(x)$ de la série et que $R = 2$.

1) On a tout d'abord

$$0 \leq a_n = \int_0^1 \frac{1}{(2+t^2)^{n+1}}\,dt \leq \frac{1}{2^{n+1}}\,.$$

Puisque la série géométrique de terme général $x^n/2^{n+1}$ a pour rayon de convergence 2, on en déduit que $R \geq 2$.

2) Pour $|x| < 2$, calculons la somme partielle S_n de la série entière. Tout d'abord en sommant la série géométrique, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2+t^2)^{k+1}} = \frac{1}{2+t^2}\,\frac{1-\left(\dfrac{x}{2+t^2}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{x}{2+t^2}} = \frac{1}{2-x+t^2}\left(1-\left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n+1}\right).$$

En intégrant, on obtient donc

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \int_0^1 \frac{dt}{2-x+t^2} - \int_0^1 \left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n+1} \frac{dt}{2-x+t^2}\,.$$

Mais

$$0 \leq \int_0^1 \left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n+1} \frac{dt}{2-x+t^2} \leq \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} \int_0^1 \frac{dt}{2-x+t^2}\,,$$

et puisque $|x| < 2$, le membre de droite tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Il résulte du théorème d'encadrement que la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n+1} \frac{dt}{2-x+t^2}\right)$ converge vers 0, et donc que la suite (S_n) converge vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{2-x+t^2}$.

3) Cette intégrale se calcule et l'on obtient finalement

$$S(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{2-x}}\,\arctan\frac{t}{\sqrt{2-x}}\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,\arctan\frac{1}{\sqrt{2-x}}\,.$$

On remarque que

$$\lim_{x\to 2^-} S(x) = +\infty\,,$$

ce qui ne serait pas possible si on avait $R > 2$, car la série entière est continue sur $]-R, R[$. Il en résulte alors que $R = 2$.

Déterminer le rayon de convergence R et calculer, pour tout nombre x réel tel que $|x| < R$, la somme de la série entière de coefficient

$$a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt\,.$$

Soit $|x| < 1$. Si $0 \leq t \leq 1$ posons

$$f_n(t) = \frac{t^n |x|^n}{1+t^2}\,.$$

On a

$$0 \leq f_n(t) \leq |x|^n\,,$$

et la série de fonctions continues de terme général f_n converge donc normalement sur $[\,0,\,1\,]$. On peut intervertir les sommations, et on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \sum_{n=0}^{\infty} (tx)^n \, dt = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1-tx)}\,.$$

Pour x fixé, on décompose la fraction rationnelle de la variable t en éléments simples

$$\frac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{1+tx}{1+t^2} + \frac{x^2}{1-tx}\right)\,.$$

L'intégrale se calcule alors et l'on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \frac{1}{1+x^2}\left[\arctan t + \frac{x}{2}\ln(t^2+1) - x\ln(1-tx)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}\,x - x\ln(1-x)\right)\,. \end{aligned}$$

On a montré en particulier que le rayon de convergence R de la série est plus grand que 1. Mais on constate que la somme obtenue a une limite infinie lorsque x tend vers 1. Il en résulte que l'on ne peut avoir $R > 1$. Finalement $R = 1$.

Déterminer le rayon de convergence R et calculer, pour tout nombre x réel tel que $|x| < R$, la somme de la série entière de coefficient

$$a_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt\,.$$

Que se passe-t-il si $|x| = R$?

La suite (a_n) est décroissante positive. On peut calculer a_n en intégrant par parties. On obtient, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \Big[(1-t^2)^n t\Big]_0^1 + 2n \int_0^1 t^2(1-t^2)^{n-1}\,dt \\ &= 2n\left[\int_0^1 (t^2-1)(1-t^2)^{n-1}\,dt + \int_0^1 (1-t^2)^{n-1}\,dt\right] \\ &= 2n(a_{n-1}-a_n)\,. \end{aligned}$$

On en déduit la relation de récurrence

$$a_n = \frac{2n}{2n+1}\,a_{n-1}\,,$$

ce qui donne

$$a_n = \frac{(2n)\cdots 2}{(2n+1)\cdots 3}\,a_0 = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\,.$$

On obtient alors par la formule de Stirling

$$a_n \sim \frac{2^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2n\pi}{(2n)\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4n\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}\,.$$

La suite (a_n) converge donc vers 0. Par ailleurs la série entière de terme général $a_n x^n$ a même rayon de convergence que la série entière de terme général $x^n/\sqrt{n}$, et l'on voit facilement en appliquant la règle d'Alembert, que cette série est de rayon 1.

L'équivalent précédent montre que la série de terme général (a_n) diverge. Par contre la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge puisque c'est une série alternée. La série entière converge donc si et seulement si x appartient à $[\,-1,\,1\,[$.

Pour calculer sa somme $S(x)$, calculons les sommes partielles de la série. On a

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (1-t^2)^k x^k\right) dt = \int_0^1 \frac{1-(1-t^2)^{n+1}x^{n+1}}{1-(1-t^2)x}\,dt\,.$$

Mais

$$\int_0^1 \frac{dt}{1-(1-t^2)x} = \int_0^1 \frac{dt}{(1-x)+t^2x}\,,$$

et, selon le signe, de x on obtient facilement une primitive de la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{1}{(1-x)+t^2x}\,.$$

Lorsque $0 < x < 1$, on écrit
$$f(t) = \frac{1}{(1-x)}\,\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,t\right)^2}\,,$$
et l'on obtient
$$\int_0^1 \frac{dt}{1-(1-t^2)x} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,.$$
Lorsque $-1 < x < 0$, on écrit
$$f(t) = \frac{1}{(1-x)}\,\frac{1}{1-\left(\sqrt{\frac{-x}{1-x}}\,t\right)^2} = \frac{1}{2(1-x)}\left(\frac{1}{1-\sqrt{\dfrac{-x}{1-x}}\,t}+\frac{1}{1+\sqrt{\dfrac{-x}{1-x}}\,t}\right),$$
et puisque
$$\frac{-x}{1-x} = 1+\frac{1}{x-1}$$
ce nombre appartient à l'intervalle $]\,0,\,1\,[$. On obtient cette fois
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dt}{1-(1-t^2)x} &= \frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}}\,\ln\frac{1+\sqrt{\dfrac{-x}{1-x}}}{1-\sqrt{\dfrac{-x}{1-x}}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}}\,\ln\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{-x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{-x}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}}\,\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{-x})^2\\
&= \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}\,\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{-x})\,.
\end{aligned}$$

Lorsque x appartient à $]\,-1,\,1\,[$, il reste à majorer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}|x|^{n+1}}{1-(1-t^2)x}\,dt$. En majorant $(1-t^2)^{n+1}$ par 1, on obtient
$$\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}|x|^{n+1}}{1-(1-t^2)x}\,dt \leq |x|^{n+1}\int_0^1 \frac{1}{1-(1-t^2)x}\,dt\,,$$
et il en résulte que cette expression a pour limite 0 lorsque n tend vers l'infini.

Enfin, lorsque $x = -1$ le théorème d'Abel permet de prolonger par continuité.

On a donc finalement

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \arctan\sqrt{\dfrac{x}{1-x}} & \text{si } x \in \,]\,0,\, 1\,[\\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x(x-1)}} \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{-x}) & \text{si } x \in \,[\,-1,\, 0\,[\,. \end{cases}$$

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite réelle définie par $a_0 = a_1 = 1$ et, pour $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k a_{n-k}\,.$$

1) Montrer que pour tout entier n, on a

$$0 < a_n \leq n!$$

et en déduire que le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\dfrac{a_n}{n!}\,x^n$ est supérieur ou égal à 1.

2) Pour x dans $]\,-R,\, R\,[$ on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\,x^n\,.$$

2.a Montrer que pour tout x de $]\,-R,\, R\,[$ on a

$$S^2(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!}\,x^n\,.$$

2.b Montrer que pour tout x de $]\,-R,\, R\,[$ on a

$$S'(x) = \frac{1}{2}\,(1 + S^2(x))$$

et en déduire $S(x)$.

3) Déterminer un majorant de R.

1) On montre les inégalités par récurrence. Tout d'abord $0 < a_0 = 0! = 1$, et si l'on suppose que pour tout k compris entre 0 et n, on a

$$0 < a_k \leq k!\,,$$

alors

$$0 < a_{n+1} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k)!k! = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} n! = \frac{1}{2}(n+1)n! \leq (n+1)!\,,$$

ce qui donne les inégalités au rang $n+1$. Elles sont donc vraies pour tout $n \geq 0$.

On a alors

$$\frac{|a_n|}{n!} \leq 1\,,$$

et la série entière de coefficient $a_n/n!$ a un rayon de convergence supérieur à celui de la série géométrique. Donc $R \geq 1$.

2.a Si $|x| < R$, on a, en utilisant le produit de Cauchy,

$$S(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{a_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!}\,.$$

En utilisant la relation de récurrence, on obtient donc

$$S(x)^2 = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \frac{x^n}{n!}\,.$$

2.b Si $|x| < R$, on obtient en dérivant

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \frac{x^n}{n!}\,.$$

On en déduit que la fonction S vérifie sur $\,]-R,\, R[\,$ l'équation différentielle

$$S'(x) = \frac{1}{2}\left(S(x)^2 + 1\right),$$

avec la condition initiale $S(0) = a_0 = 1$. Cela s'écrit encore

$$\frac{S'(x)}{1 + S(x)^2} = \frac{1}{2}\,,$$

ce qui donne

$$\arctan S(x) = \frac{x}{2} + C\,.$$

où C est une constante, donc

$$S(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + C\right)\,.$$

Comme $S(0) = 1 = \tan C$. On a

$$C = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

avec k entier, ce qui donne finalement

$$S(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\,.$$

3) Si on avait $R > \pi/2$, alors la fonction S serait continue en $\pi/2$. Mais $\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ n'a pas de limite finie en $\pi/2$, d'où une contradiction. Donc

$$R \leq \pi/2\,.$$

> Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres complexes définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n,
> $$u_{n+1} = u_n - v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_n - 2v_n\,.$$
> Calculer les rayons de convergence et les sommes des séries entières de coefficients u_n et v_n.

Posons

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \quad \text{et} \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n\,.$$

Soit R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs de ces deux séries entières. Si ces rayons ne sont pas nuls, on a alors pour $|z| < \min(R_1, R_2)$,

$$f_1(z) = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} z^{n+1} = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (u_n - v_n) z^{n+1}\,,$$

d'où

$$f_1(z) = u_0 + z(f_1(z) - f_2(z))\,.$$

De même, obtient-on,

$$f_2(z) = v_0 + z(f_1(z) - 2f_2(z))\,.$$

Les nombres $f_1(z)$ et $f_2(z)$ apparaissent donc comme solution d'un système linéaire

$$\begin{cases} (1-z)f_1(z) + zf_2(z) = 1 \\ zf_1(z) - (2z+1)f_2(z) = 0 \end{cases}.$$

Le déterminant de ce système vaut

$$(z-1)(2z+1) - z^2 = z^2 - z - 1$$

et admet comme racines réelles

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Donc si $|z| < (\sqrt{5}-1)/2$, le système est de Cramer et on obtient les solutions

$$f_1(z) = -\frac{2z+1}{z^2-z-1} \quad \text{et} \quad f_2(z) = -\frac{z}{z^2-z-1}\,.$$

Pour $\alpha \neq 0$, la fonction qui à z associe

$$\frac{1}{z-\alpha} = -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{1-\frac{z}{\alpha}}$$

est développable en série entière de rayon $|\alpha|$. Alors $\dfrac{1}{z-\Phi}$ et $\dfrac{1}{z+1/\Phi}$ sont développables en série entière de rayons respectifs

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\Phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,.$$

La fonction produit

$$\frac{1}{z-\Phi}\,\frac{1}{z+1/\Phi} = \frac{1}{z^2-z-1}$$

est donc développable en série entière de rayon $(\sqrt{5}-1)/2$, et par suite les fonctions f_1 et f_2 également. Comme ces fonctions ont un pôle en $(\sqrt{5}-1)/2$, le rayon de convergence des deux séries vaut exactement $(\sqrt{5}-1)/2$. En remontant les calculs, on vérifie que les coefficients des développements en série entière des fonctions obtenues satisfont bien les relations de l'énoncé.

Remarque : il est également possible de calculer explicitement u_n et v_n à partir de la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}\,.$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont des combinaisons linéaires des suites $((-\Phi)^n)$ et $((1/\Phi)^n)$. Le calcul de f_1 et f_2 se ramène alors à sommer des séries géométriques.

Pour tout entier naturel n on pose (intégrale de Wallis)

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt\,.$$

1) Pour tout entier $n \geq 2$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}. Que vaut nI_nI_{n-1} lorsque $n \geq 1$?

2) Quel est le rayon de convergence R de la série entière de terme général I_n ?
Si $|x| < R$, calculer la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n x^n$$

de deux manières différentes :

2.1 en intervertissant des sommations ;

2.1 en utilisant la relation de récurrence pour trouver une équation différentielle vérifiée par S.

3) En déduire la partie paire et la partie impaire de $S(x)$.
4) Si $|x| < R$ calculer la somme

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{I_n}$$

en fonction de $S(x)$.

1) L'intégrale de Wallis se calcule en intégrant par parties. Si l'on pose

$$u(t) = \cos^{n-1} t \quad \text{et} \quad v'(t) = \cos t \,,$$

on a alors

$$u'(t) = -(n-1)\sin t \cos^{n-2}(t) \quad \text{et} \quad v(t) = \sin t \,,$$

et donc

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[\sin t \cos^{n-1} t\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^{n-2} t \, dt \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 t)\cos^{n-2} t \, dt \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \,. \end{aligned}$$

On en déduit la relation de récurrence

$$nI_n = (n-1)I_{n-2} \,,$$

avec de plus

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = 1 \,.$$

On a alors

$$nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2} \,,$$

et la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\geq 1}$ est constante. On a donc

$$nI_nI_{n-1} = I_1I_0 = \frac{\pi}{2} \,.$$

2) On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_{n-2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1 \,.$$

Les parties paires et impaires de la série on donc le même rayon $R^2 = 1$. Il en résulte que la série est de rayon 1.

2.1 Soit x dans $]-1,\, 1[$. Posons
$$f_n(t) = x^n \cos^n t\,.$$
Pour tout t de $[0,\, \pi/2]$ et tout entier n on a
$$|x^n \cos^n t| \leq |x|^n\,,$$
et la série de terme général $|x|^n$ converge. Il en résulte que la série de fonctions continues de terme général f_n converge normalement sur $[0,\, \pi/2]$. On peut intervertir les sommations et
$$S(x) = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (x\cos t)^n\right) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 - x\cos t}\,.$$
En utilisant la relation
$$\cos t = \frac{1 - \tan^2 \frac{t}{2}}{1 + \tan^2 \frac{t}{2}}\,,$$
on obtient
$$S(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \tan^2 \frac{t}{2}}{(1-x) + (1+x)\tan^2 \frac{t}{2}}\, dt\,.$$
Le changement de variable
$$u = \tan\frac{t}{2} \quad \text{donc} \quad du = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2 \frac{t}{2}\right) dt\,,$$
est une bijection de $[0,\, \pi/2]$ sur $[0,\, 1]$. On obtient
$$S(x) = 2\int_0^1 \frac{du}{(1-x) + (1+x)u^2} = \left[\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan \frac{u(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,.$$
2.2 En dérivant, on a
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nI_n\, x^{n-1} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} nI_n\, x^{n-1}\,.$$
On peut alors utiliser la relation de récurrence. On obtient
$$S'(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)I_{n-2}\, x^{n-1} = 1 + x\, U(x)\,,$$
où
$$U(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)I_{n-2}\, x^{n-2}\,.$$
Mais $U(x)$ est la dérivée de
$$\sum_{n=2}^{\infty} I_{n-2}\, x^{n-1} = x \sum_{n=2}^{\infty} I_{n-2}\, x^{n-2} = xS(x)\,,$$

Donc
$$U(x) = xS'(x) + S(x)$$
et l'on obtient
$$S'(x) = 1 + x(xS'(x) + S(x)),$$
ce qui donne l'équation différentielle linéaire
$$(\star) \qquad (1 - x^2)S'(x) - xS(x) = 1.$$
On résout l'équation homogène en utilisant le procédé heuristique suivant :

on écrit
$$\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{x}{1 - x^2}$$
ce qui donne
$$\ln|S(x)| = -\frac{1}{2}\ln(1 - x^2) + A$$
où A est une constante, puis, en prenant l'exponentielle,
$$S(x) = \frac{K}{\sqrt{1 - x^2}},$$
où K est une constante quelconque.

Pour résoudre $(\star)$, on fait ensuite varier la constante en cherchant une solution de la forme
$$S(x) = \frac{K(x)}{\sqrt{1 - x^2}},$$
ce qui donne en remplaçant dans l'équation $(\star)$,
$$\sqrt{1 - x^2}\,K'(x) = 1,$$
donc
$$K'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$
puis
$$K(x) = \arcsin x + C,$$
où C est une constante. On a alors
$$S(x) = \frac{\arcsin x + C}{\sqrt{1 - x^2}}.$$
Puisque
$$C = S(0) = I_0 = \frac{\pi}{2},$$
on trouve finalement
$$S(x) = \frac{\arcsin x + \pi/2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3) En utilisant cette dernière expression, on obtient immédiatement

$$S_P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n}\, x^{2n} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

et

$$S_I(x) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n+1}\, x^{2n+1} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

4) En utilisant le fait que, si $n \geq 1$, on a

$$\frac{1}{I_n} = \frac{2}{\pi}\, nI_{n-1}\,,$$

on a donc

$$T(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{I_n} = \frac{2}{\pi}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} nI_{n-1}\, x^n\right)\,,$$

puis

$$T(x) = \frac{2}{\pi}\left(1 + x\sum_{n=1}^{\infty} nI_{n-1}\, x^{n-1}\right) = \frac{2}{\pi}(1 + x\,U(x))\,.$$

Mais, en utilisant l'équation ($\star$), on trouve

$$U(x) = xS'(x) + S(x) = x\,\frac{1+xS(x)}{1-x^2} + S(x) = \frac{x+S(x)}{1-x^2}\,,$$

d'où

$$T(x) = \frac{2}{\pi}\left(1 + x\,\frac{x+S(x)}{1-x^2}\right) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1+xS(x)}{1-x^2}\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R et calculer, pour x dans $]-R,\, R[$ la somme S de la série de coefficient

$$a_n = \int_0^1 2^n t^n (1-t)^n\, dt\,.$$

L'étude de la fonction qui à t associe $t(1-t)$ sur l'intervalle $[0,\, 1]$, montre qu'elle atteint son maximum en $t = 1/2$, et que ce maximum vaut $1/4$. Donc

$$0 \leq t(1-t) \leq \frac{1}{4}\,,$$

et on en déduit que

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{2^n}\,.$$

Il en résulte que $R \geq 2$.

Il en résulte aussi que si l'on pose, pour x fixé dans $]-2,\, 2[$,

$$f_n(t) = 2^n t^n (1-t)^n x^n\,,$$

on a

$$|f_n(t)| \leq \left(\frac{|x|}{2}\right)^n\,,$$

et donc que la série de fonctions continues f_n converge normalement sur $[0,\, 1]$. On peut donc inverser les sommations et l'on obtient

$$S(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n (1-t)^n x^n\, dt = \int_0^1 \frac{dt}{1-2t(1-t)x} = \int_0^1 \frac{dt}{2xt^2 - 2xt + 1}\,.$$

On calcule cette intégrale suivant les valeurs de x.

Si x appartient à l'intervalle $]0,\, 2[$, le trinôme $2xt^2 - 2xt + 1$ a son discriminant

$$\Delta = 4x^2 - 8x = 4x(x-2)$$

négatif et

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} \left[\arctan \frac{2tx - x}{\sqrt{x(2-x)}}\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{x(2-x)}} \arctan \sqrt{\frac{x}{2-x}}\,.$$

Si x est nul, on obtient $S(0) = 1$.

Si x appartient à l'intervalle $]-2,\, 0[$, le trinôme a son discriminant positif. Il possède deux racines réelles distinctes et la fraction rationnelle se décompose en éléments simples sous la forme

$$\frac{1}{2xt^2 - 2xt + 1} = \frac{x}{\sqrt{x(x-2)}} \left(\frac{1}{2tx - x - \sqrt{x(x-2)}} - \frac{1}{2tx - x + \sqrt{x(x-2)}}\right)\,.$$

On a donc

$$S(x) = \left[\frac{1}{2\sqrt{x(x-2)}} \ln \left|\frac{2tx - x - \sqrt{x(x-2)}}{2tx - x + \sqrt{x(x-2)}}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{x(x-2)}} \ln \frac{\sqrt{x(x-2)} - x}{\sqrt{x(x-2)} + x}\,.$$

On remarque en particulier que $S(x)$ a une limite infinie lorsque x tend vers 2, ce qui ne serait pas possible si l'on avait $R > 2$. Il en résulte donc que $R = 2$.

Chapitre 3

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 des fonctions f et g définies par

$$f(x) = \arcsin x \quad \text{et} \quad g(x) = \operatorname{argsh} x\,,$$

et préciser les rayons de convergence.

On a

$$f'(x) = (1-x^2)^{-1/2} \quad \text{et} \quad g'(x) = (1+x^2)^{-1/2}\,.$$

On commence par chercher le développement de $(1+x)^{-1/2}$, qui est de rayon 1. On a

$$\begin{aligned}
(1+x)^{-1/2} &= 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\, x^n \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\,\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}\, x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\, n!}\, x^n\,.
\end{aligned}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par le produit

$$2\cdot 4\cdots(2n) = 2^n\, n!$$

on obtient

$$(1+x)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{x^n}{2^{2n}}\,.$$

Alors

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{2^{2n}}\,,$$

et

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{2^{2n}} .$$

En prenant les primitives nulles en 0, on en tire les séries voulues (de rayon 1),

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{2^{2n}\,(2n+1)} ,$$

et

$$\operatorname{argsh} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{2^{2n}\,(2n+1)} .$$

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

et préciser le rayon de convergence R.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a

$$f'(x) = -\frac{2x}{1+x^4} .$$

On peut donc utiliser la série géométrique pour obtenir, pour tout x de $]-1,\, 1[$,

$$\frac{1}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} ,$$

et donc

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^{n+1} x^{4n+1} .$$

Alors $R = 1$ et la fonction f admet dans $]-1,\, 1[$ le développement en série entière

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \frac{x^{4n+2}}{4n+2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{4n+2}}{2n+1} .$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{-x^2 + x + 2}\,.$$

1) Développer la fonction f en série entière au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence R.
2) Quel est le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0 ?

1) La fraction rationnelle se décompose en éléments simples. On obtient

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x/2}\right).$$

Il apparaît la somme de deux séries géométriques, la première de rayon de convergence 1 et la seconde de rayon de convergence 2. Il en résulte que la somme admettra $R = 1$ comme rayon de convergence. Alors, pour $|x| < 1$,

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n\,.$$

2) Le partie régulière du développement limité à l'ordre 3 de la fonction f n'est autre que la somme partielle d'ordre 3 de la série, donc

$$f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{3}\left((-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n + \circ(x^3) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \circ(x^3)\,.$$

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$$

et préciser le rayon de convergence R.

On a, si $x < 2$,

$$f(x) = \ln[(x-2)(x-3)) = \ln(2-x) + \ln(3-x)\,,$$

et la fonction f est dérivable sur $I =]-\infty, 2[$. Pour tout x de I, on a

$$f'(x) = -\frac{1}{2-x} - \frac{1}{3-x} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\,.$$

Si x appartient à $]-2, 2[$, on peut utiliser la série géométrique et l'on obtient

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}\,.$$

De même, si x appartient à $]-3, 3[$, on a

$$\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}\,,$$

Il en résulte que, si x appartient à $]-2, 2[$, on obtient

$$f'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n\,.$$

On en déduit alors

$$f(x) = f(0) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln 6 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) \frac{x^n}{n}\,.$$

La série entière a pour rayon de convergence $R = 2$.

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = (2x+3)^{-2}$$

et préciser le rayon de convergence R.

On écrit tout d'abord

$$\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\frac{2x}{3}}\,.$$

On se ramène ainsi à une série géométrique de rayon $R = 3/2$, et l'on a, si $|x| < 3/2$,

$$\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n x^n\,.$$

Alors, en dérivant cette relation, on obtient, toujours si $|x| < 3/2$,

$$-\frac{2}{(2x+3)^2} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n x^{n-1}\,,$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{(2x+3)^2} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{2^n}{3^{n+2}}\, x^n\,.$$

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{(x-1)(2x-1)}$$

et préciser le rayon de convergence R.

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples sous la forme

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{2x-1}\,.$$

En multipliant par $x-1$ et en remplaçant x par 1, on obtient $b=3$.
En multipliant par $2x-1$ et en remplaçant x par $1/2$, on obtient $c=-3$.
Le rapport des coefficients des termes de plus haut degré vaut $a=1$. Donc

$$f(x) = 1 - \frac{3}{1-x} + \frac{3}{1-2x}\,.$$

La décomposition en série donne alors

$$f(x) = 1 - 3\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n\,.$$

La première série est de rayon 1 et la seconde de rayon $1/2$, donc le résultat est de rayon $R=1/2$, et l'on a

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 3(2^n-1)x^n\,.$$

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^3+1}{(x-1)(x+2)}$$

et préciser le rayon de convergence R.

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples sous la forme

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+2}\,.$$

En multipliant par $x-1$ et en remplaçant x par 1, on obtient $c=2/3$.
En multipliant par $x+2$ et en remplaçant x par -2, on obtient $d=7/3$.

En effectuant la division euclidienne de x^3+1 par x^2+x-2, on obtient le quotient $x-1$, donc $a=1$ et $b=-1$. Finalement

$$f(x) = -1 + x - \frac{2}{3}\,\frac{1}{1-x} + \frac{7}{6}\,\frac{1}{1+\dfrac{x}{2}}\,.$$

La décomposition en série donne alors

$$f(x) = -1 + x - \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{7}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}\,.$$

La première série est de rayon 1 et la seconde de rayon 2, donc le résultat est de rayon $R=1$, et l'on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

où

$$a_0 = -1 - \frac{2}{3} + \frac{7}{6} = -\frac{1}{2}\,,$$

(on vérifie que c'est bien $f(0)$),

$$a_1 = 1 - \frac{2}{3} - \frac{7}{6}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\,.$$

Finalement

$$f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{2}{3} + (-1)^n\,\frac{7}{6}\,\frac{1}{2^n}\right)x^n\,.$$

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}$$

et préciser le rayon de convergence R.

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples sous la forme

$$f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}\,.$$

En multipliant par $(x-1)^2$ et en remplaçant x par 1, on obtient $a=-1$.

En multipliant par $x-2$ et en remplaçant x par 2, on obtient $c=1$.

Enfin

$$f(0) = -\frac{1}{2} = a - b - \frac{c}{2}$$

d'où $b = -1$. Finalement

$$f(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\dfrac{x}{2}}\,.$$

On a successivement, si $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,,$$

puis, en dérivant,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n\,.$$

Enfin, si $|x| < 2$,

$$\frac{1}{1-\dfrac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}\,.$$

on obtient donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-n - \frac{1}{2^{n+1}}\right] x^n\,.$$

Le calcul précédent est valable si $|x| < 1$, donc le rayon de convergence R est plus grand que 1. Comme le dénominateur $(x-1)^2(x-2)$ s'annule en 1, on a aussi $R \geq 1$, donc $R = 1$.

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan(1+x)$$

et préciser le rayon de convergence R.

On a

$$f'(x) = \frac{1}{2+2x+x^2}\,.$$

Plutôt que de décomposer $f'(x)$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$, on peut écrire

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x+\dfrac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1-x+\dfrac{x^2}{2}}{1+\dfrac{x^4}{4}}\,.$$

Si $x^4 < 4$, on en déduit,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{4n}}{4^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\,\frac{x^{4n}}{2^{2n+1}} - (-1)^n\,\frac{x^{4n+1}}{2^{2n+1}} + (-1)^n\,\frac{x^{4n+2}}{2^{2n+2}}\right). \end{aligned}$$

On obtient donc $f(x)$ en intégrant, et, le terme constant vaut

$$f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}\,,$$

donc

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\,,$$

où, si $p \geq 0$,

$$a_{4p+1} = \frac{(-1)^p}{2^{2p+1}\,(4p+1)} \quad , \quad a_{4p+2} = \frac{(-1)^{p+1}}{2^{2p+1}\,(4p+2)} \quad , \quad a_{4p+3} = \frac{(-1)^p}{2^{2p+2}\,(4p+3)}\,,$$

les coefficients a_{4p} étant nuls si $p \geq 1$.

Le calcul précédent est vrai lorsque $|x| < \sqrt{2}$, ce qui montre que le rayon de convergence R est supérieur à 2. Comme $2 + 2x + x^2$ s'annule pour $-1 + i$, on a nécessairement

$$R \leq |-1 + i| = \sqrt{2}\,.$$

Finalement

$$R = \sqrt{2}\,.$$

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(1 + x + x^2)$$

et préciser le rayon de convergence R.

En écrivant, si $|x| < 1$,

$$f(x) = \ln\frac{1 - x^3}{1 - x} = \ln(1 - x^3) - \ln(1 - x)\,,$$

on obtient

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\,.$$

Donc

$$\ln(1+x+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

où, lorsque $n = 3p+1$ ou $3p+2$ avec $p \geq 0$, on a

$$a_n = \frac{1}{n}\,,$$

et lorsque $n = 3p$ avec $p \geq 1$,

$$a_n = -\frac{2}{n}\,.$$

Le calcul précédent est vrai si $|x| < 1$, ce qui montre que le rayon de convergence R est supérieur à 1. Comme x^2+x+1 s'annule pour j, on a nécessairement

$$R \leq |j| = 1\,.$$

Finalement

$$R = 1\,.$$

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0, de la fonction f définie par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1)$$

et préciser le rayon de convergence R.

On peut utiliser deux méthodes :

Première méthode. On écrit

$$f(x) = x\ln(x+1) + \ln(x+1)\,.$$

En utilisant le développement en série entière de $\ln(1+x)$, on obtient si $|x| < 1$,

$$f(x) = x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\,.$$

En changeant de variable dans la première somme, on trouve

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\left((-1)^n \frac{1}{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right) x^n + x \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) x^n + x \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n(n-1)}\, x^n\,.
\end{aligned}$$

On s'assure alors que la série est de rayon 1. En effet, si

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n(n-1)}\,,$$

on a

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{n+1}{n-1}\,,$$

et la suite $(|a_n|/|a_{n+1}|)$ converge vers $R = 1$.

Deuxième méthode. On utilise le fait que $(x+1)\ln(x+1) - x$ est la primitive, nulle en 0 de $\ln(1+x)$. La primitive est donc une série de rayon 1, et, si $|x| < 1$,

$$(x+1)\ln(x+1) - x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}\,,$$

et donc

$$(x+1)\ln(x+1) = x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}\,.$$

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0, de la fonction f définie par

$$f(x) = \cos(x+1)$$

et préciser le rayon de convergence R.

On écrit

$$f(x) = \cos x \cos 1 - \sin x \sin 1\,,$$

d'où l'on déduit, pour tout x réel, puisque les séries sont de rayon infini,

$$f(x) = \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \,.$$

On a donc $R = +\infty$ et

$$\cos(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,,$$

avec

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\cos 1}{(2n)!} \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{\sin 1}{(2n+1)!} \,.$$

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0, de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{2-x}$$

et préciser le rayon de convergence R.

On écrit

$$f(x) = \sqrt{2} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{1/2} \,.$$

On obtient alors une série de rayon $R = 2$, et l'on a, si $|x| < 2$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \frac{1}{2^n} (-1)^n x^n \\ &= \sqrt{2} \left(1 - \frac{x}{4} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^{2n} n!} x^n \right) . \end{aligned}$$

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0, de la fonction f définie par

$$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

et préciser le rayon de convergence R.

La fonction s'obtient comme le produit de deux séries entières de rayon 1. C'est donc une série de rayon 1 au moins, et comme $f(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers 1^-, le rayon est $R = 1$ exactement. Comme

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{et} \quad -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \,,$$

on obtient immédiatement, en appliquant le produit de Cauchy,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n .$$

Développer en série entière à l'origine la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$$

et préciser le rayon de convergence R.

La fonction f peut s'écrire comme composée de fonctions développables en série entière mais on n'a pas, à ce niveau, de résultats permettant d'exploiter cela. Par contre, si on montre que f est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux, alors on pourra déterminer facilement les coefficients en résolvant l'équation différentielle à l'aide des séries entières.

On obtient en dérivant

$$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}} = \frac{f(x)}{2\sqrt{1+x^2}} ,$$

puis en dérivant de nouveau

$$f''(x) = \frac{1}{2} \, \frac{\sqrt{1+x^2} f'(x) - f(x) \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} .$$

Mais en remplaçant $\sqrt{1+x^2} f'(x)$ par $f(x)/2$ et $f(x)/\sqrt{1+x^2}$ par $2f'(x)$, on en déduit

$$(1+x^2) f''(x) = \frac{f(x)}{4} - x f'(x) .$$

Donc f est solution de l'équation différentielle

$$(1+x^2) f''(x) + x f'(x) - \frac{f(x)}{4} = 0 ,$$

avec les conditions initiales $f(0) = 1$, et $f'(0) = f(0)/2 = 1/2$.

On cherche alors une solution de l'équation différentielle développable en série entière sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

On a donc

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \,.$$

Posons

$$D(x) = (1+x^2) f''(x) + x f'(x) - \frac{f(x)}{4} \,.$$

On a alors

$$\begin{aligned} D(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}\, a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}\, a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) a_n \right] x^n \,. \end{aligned}$$

Comme la série entière $D(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc, pour tout entier $n \geq 1$,

$$(n+1)(n+2) a_{n+2} + \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) a_n \,,$$

c'est-à-dire

$$a_{n+2} = -\frac{(2n+1)(2n-1)}{4(n+2)(n+1)}\, a_n \,.$$

On remarque que la limite de la suite $(|a_n|/|a_{n+2}|)$ vaut $R' = 1$. C'est le rayon de convergence des séries de termes généraux $a_{2n} x^n$ et $a_{2n+1} x^n$. Alors les parties paires et impaires de la série $f(x)$ ont pour rayons $\sqrt{R'} = 1$. On en déduit que $R = \sqrt{R'} = 1$.

Le calcul précédent est donc vrai si $|x| < 1$. On obtient alors les coefficients pairs en fonction de $a_0 = 1$ et les coefficients impairs en fonction de $a_1 = 1/2$.

En partant de la relation

$$a_{2p} = -\frac{(4p-3)(4p-5)}{4(2p)(2p-1)}\, a_{2p-2}$$

pour $p \geq 1$, on obtient

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \, \frac{(4p-3)(4p-5)\cdots 1 \cdot (-1)}{(2p)!} a_0 \,.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par le produit

$$(4p-2) \cdots 2 = 2^{2p-1} (2p-1)! \,,$$

on a alors,

$$a_{2p} = \frac{(-1)^{p+1}}{2^{4p}\, p} \, \frac{(4p-2)!}{[(2p-1)!]^2} = \frac{(-1)^{p+1}}{2^{4p}\, p} \binom{4p-2}{2p-1} \,.$$

La même méthode, en partant de

$$a_{2p+1} = -\frac{(4p-1)(4p-3)}{4(2p+1)(2p)}\, a_{2p-1}$$

pour $p \geq 1$, donne

$$a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \frac{(4p-1)\cdots 1}{(2p+1)!} a_1 = \frac{(-1)^p}{2^{4p+1}} \frac{(4p)!}{(2p+1)!(2p)!} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)2^{4p+1}} \binom{4p}{2p}.$$

Comme il y a unicité de la solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales données, les coefficients obtenus sont bien ceux du développement en série de la fonction f.

Soit a dans $]-1,\, 1[$. Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sh}(a^n x)$$

et préciser le rayon de convergence R.

Pour tout x réel, on a

$$\operatorname{sh}(a^n x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a^n x)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Considérons la somme double

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^n x)^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

et étudions tout d'abord si elle converge absolument. On obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(a^n x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} |a|^{n(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{1}{1-|a|^{2k+1}}.$$

Mais, si $k \geq 1$, on a

$$\frac{1}{(2k+1)!(1-|a|^{2k+1})} \leq \frac{1}{(2k+1)!(1-|a|)},$$

et la série entière de terme général $\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!(1-|a|)}$ est de rayon infini. Il s'en suit que la série de terme général $\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!(1-|a|^{2k+1})}$ converge absolument et donc que la somme double S converge absolument pour tout x réel.

Il résulte du théorème de Fubini que la série de terme général $\operatorname{sh}(a^n x)$ converge pour tout x réel et que l'on a alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{sh}(a^n x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^n x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} a^{n(2k+1)}\,,$$

ce qui donne le développement en série entière de rayon $R = +\infty$ suivant :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{sh}(a^n x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(1-a^{2k+1})(2k+1)!}\,.$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\, dt\,.$$

Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. et déterminer son développement en série entière au voisinage de 0.

La série entière de l'exponentielle étant de rayon infini, les fonctions qui à x associent respectivement e^{-x^2} et e^{x^2} sont développables en série entière de rayon infini. Alors la fonction g définie par

$$g(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$$

l'est aussi comme primitive d'une fonction développable en série entière de rayon infini. Enfin f l'est également comme produit de deux fonctions développables en série entière de rayon infini.

La fonction f est dérivable et, pour tout x réel, on a

$$f'(x) = 1 - 2xf(x)\,,$$

avec de plus $f(0) = 0$. Cherchons une série entière solution de cette équation en posant

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

Alors

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n\,,$$

et l'on obtient

$$f'(x) + 2xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1}\,,$$

ou encore, en changeant d'indice de sommation dans la deuxième somme,

$$\begin{aligned} f'(x) + 2xf(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1}x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1})x^n \,. \end{aligned}$$

Comme cette série doit être égale à la série constante 1, l'égalité précédente implique l'égalité des coefficients des deux séries. On a donc $a_1 = 1$, et, pour tout $n \geq 1$, on trouve

$$(n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} = 0\,,$$

avec de plus la condition initiale $a_0 = f(0) = 0$.

Il résulte immédiatement par récurrence que les termes de rang pair sont nuls (ce qui était prévisible puisque la fonction f est impaire). Pour les termes de rang impair, on a la relation

$$a_{2p+1} = -\frac{2}{2p+1}\, a_{2p-1}\,,$$

d'où l'on déduit, également par récurrence, que

$$a_{2p+1} = \frac{(-2)^p}{(2p+1)(2p-1)\cdots 1}\,.$$

Donc, pour tout x réel, on a

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-2)^p x^{2p+1}}{(2p+1)(2p-1)\cdots 1} = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{2^{2p}p!}{(2p+1)!}\, x^{2p+1}\,.$$

Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction F définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t^2+t^4}$$

et préciser le rayon de convergence R.

Pour x réel, posons

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2+x^4}\,.$$

Au voisinage de l'infini on a

$$f(x) \sim \frac{1}{x^4}\,,$$

et la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit donc une fonction F sur $\mathbb{R}$ en posant

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t^2+t^4}\,,$$

et cette fonction est une primitive de f. On cherche un développement en série entière de f.

Pour $|x| < 1$, on a

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1-x^6}\,,$$

et l'on obtient donc

$$f(x) = (1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} x^{6n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{6n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{6n+2}\,.$$

Il en résulte que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,,$$

où

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 6k \\ -1 & \text{si } n = 6k+2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\,.$$

La série entière obtenue est de rayon 1, donc sa primitive F est aussi de rayon $R = 1$.

Alors F admet un développement en série entière de la forme

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}\, x^n\,.$$

Il reste à calculer

$$F(0) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt\,.$$

Pour cela on décompose f en éléments simples. Les racines de x^4+x^2+1 sont $\pm j, \pm j^2$, et donc,

$$f(x) = \frac{a}{x-j} + \frac{\bar{a}}{x-j^2} + \frac{b}{x+j} + \frac{\bar{b}}{x+j^2}\,.$$

En tenant compte de la parité de f, on a $b = -a$.

Alors, en regroupant les termes conjugués, on aura une décomposition de la forme

$$f(x) = \frac{cx+d}{x^2+x+1} - \frac{cx-d}{x^2-x+1}\,.$$

En prenant successivement $x = 0$ et $x = 1$, on obtient

$$2d = 1 \quad \text{et} \quad -2c+4d = 1\,,$$

d'où $c = d = 1/2$. Donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+x+1} - \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x^2-x+1}\right). \end{aligned}$$

On obtient alors comme primitive

$$H(x) = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

On constate que $H(0) = 0$, et que

$$\lim_{x\to-\infty} H(x) = \frac{1}{4}\,\frac{2}{\sqrt{3}}(-\pi)\,,$$

donc

$$F(0) = \Big[H(x)\Big]_{-\infty}^{0} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\,.$$

On a, en écrivant les premiers termes de la série,

$$F(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{9} + \cdots\,.$$

Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer le développement en série entière de f en précisant le rayon de convergence R.

Soit g la fonction définie sur $]-1,\,1[$ par

$$g(x) = (1-x^2)^{-1/2}\,.$$

Cette fonction est développable en série entière dans $]-1,\,1[$. Il en est de même de la fonction qui à x associe $\arcsin x$ qui est une primitive de g, et donc du produit de ces deux fonctions qui est la fonction f. La série entière obtenue sera de rayon $R \geq 1$.

On remarque que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty\,,$$

ce qui ne serait pas possible si on avait $R > 1$, car la série entière est continue sur $\left]-R, R\right[$. Il en résulte alors que $R = 1$.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $\left]-1, 1\right[$ et l'on a

$$f'(x) = \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{1}{1-x^2}\,,$$

d'où l'on déduit

$$(1-x^2)f'(x) = xf(x) + 1\,.$$

Pour tout x de $\left]-1, 1\right[$, posons

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

Puisque $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, on a nécessairement $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.

Cherchons le développement en série entière de

$$D(x) = (1-x^2)f'(x) - xf(x) - 1\,.$$

On a

$$\begin{aligned} D(x) &= (1-x^2)\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_n x^{n+1} - 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} na_{n-1} x^n\,, \end{aligned}$$

et puisque la série $D(x)$ est la série nulle, on a, pour tout $n \geq 1$, l'égalité

$$(n+1)a_{n+1} = na_{n-1}\,.$$

Comme a_0 est nul, tous les coefficients pairs sont nuls (ce qui vient également du fait que f est impaire). Pour tout $n \geq 1$, on obtient alors,

$$(2n+1)a_{2n+1} = 2na_{2n-1}\,,$$

d'où l'on déduit, pour tout $n \geq 0$,

$$a_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\,a_1\,,$$

ou encore

$$a_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\,.$$

Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}\,,$$

où α appartient à $]\,0,\,\pi\,[$, est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer le développement en série entière de f en précisant le rayon de convergence R.

En remarquant que, pour tout x réel, on a

$$x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = (x - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha\,,$$

et puisque $\sin\alpha$ n'est pas nul, on en déduit que

$$x^2 - 2x\cos\alpha + 1 > 0\,.$$

Alors la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable comme composée de fonctions dérivables. On obtient

$$f'(x) = \frac{x - \cos\alpha}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}\,.$$

Le dénominateur ayant pour racines $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$, on décompose facilement cette fraction en éléments simples sous la forme

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x - e^{i\alpha}} + \frac{1}{x - e^{-i\alpha}}\right)\,.$$

Pour tout x réel, on a donc

$$f'(x) = \operatorname{Re}\frac{1}{x - e^{-i\alpha}} = -\operatorname{Re}\frac{e^{i\alpha}}{1 - e^{i\alpha}x}\,.$$

Si x appartient à $]\,-1,\,1\,[$, on a $|e^{i\alpha}x| < 1$, et donc on peut utiliser la série géométrique pour obtenir

$$\frac{e^{i\alpha}}{1 - e^{i\alpha}x} = e^{i\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} e^{in\alpha}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n+1)\alpha}x^n\,.$$

En prenant la partie réelle de cette expression, on en déduit que

$$f'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}(\cos(n+1)\alpha)\,x^n\,,$$

et la série entière de terme général $(\cos(n+1)\alpha)\,x^n$ est de rayon au moins 1. Mais en utilisant la relation

$$\cos 2(n+1)\alpha = 2\cos^2(n+1)\alpha - 1\,,$$

on en déduit que la suite $(\cos(n+1)\alpha)$ ne peut pas converger vers 0. Donc le rayon de la série vaut exactement 1.

Alors, en prenant la primitive nulle en 0, on en déduit que si x appartient à $]-1,\, 1[$, on a

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n} x^n\,,$$

et la série entière obtenue est encore de rayon $R = 1$.

Pour tout a de $]-\pi/2,\, \pi/2[$ et tout x de $]-1,\, 1[$, on pose

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\tan a\right)\,.$$

Etablir que

$$f'(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x+e^{2ia}}\right)\,,$$

et développer f en série entière au voisinage de 0.

On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\tan a}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\tan^2 a}\,\frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2\tan a}{(1+x)^2+(1-x)^2\tan^2 a} \\ &= \frac{-2\sin a\cos a}{(1-x)^2\sin^2 a+(1+x)^2\cos^2 a} = \frac{-\sin 2a}{x^2+2x\cos 2a+1} \\ &= \frac{-\sin 2a}{(x+e^{2ia})(x+e^{-2ia})} = \frac{\mathrm{Im}(x+e^{-2ia})}{(x+e^{2ia})(x+e^{-2ia})}\,, \end{aligned}$$

ce qui donne la relation

$$f'(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x+e^{2ia}}\right)\,.$$

On obtient alors une série géométrique de rayon de convergence 1, et donc

$$\frac{1}{x+e^{2ia}} = \frac{e^{-2ia}}{1+xe^{-2ia}} = e^{-2ia}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-2ina}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-2i(n+1)a}x^n\,,$$

Alors

$$\mathrm{Im}\,\frac{1}{x+e^{2ia}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin(2(n+1)a)x^n\,.$$

On obtient donc en intégrant

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(2na)}{n}\,x^n\,.$$

Mais puisque a appartient à l'intervalle $]-\pi/2,\, \pi/2[$, on a,

$$f(0) = \arctan(\tan a) = a\,,$$

ce qui donne finalement

$$f(x) = a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2na)}{n}\, x^n\,.$$

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + x\sin t}\, dt\,.$$

Montrer que, si $x > 0$, on a également

$$\varphi(x) = \int_0^{x} \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{x^2 - u^2}}\, du\,.$$

La fonction qui à x associe $\sqrt{1+x}$ est développable en série entière sur $]-1,\, 1[$ et on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!}\, x^n \\
&= 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1\cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n n!}\, x^n\,.
\end{aligned}$$

Si $n \geq 1$, on a donc

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{2n-1}\, n} \binom{2n-2}{n-1}\,.$$

Pour tout t dans $[0,\, \pi/2]$ et tout x dans $]-1,\, 1[$ posons

$$\varphi_n(t) = a_n x^n \sin^n t\,.$$

On a alors

$$|\varphi_n(t)| \leq |a_n||x^n|\,,$$

et la série de fonctions continues de terme général φ_n converge normalement sur $[0,\, \pi/2]$. On peut donc intervertir les sommations et l'on obtient

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + x\sin t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt\,.$$

Pour $n \geq 0$, posons

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt \, .$$

L'intégrale I_n est une intégrale de Wallis. Le développement de φ en série entière dans $]-1, 1[$ est donc

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n I_n x^n \, .$$

L'intégrale de Wallis se calcule en intégrant par parties. Si l'on pose

$$u(x) = \sin^{n-1} x \quad \text{et} \quad v'(x) = \sin x \, ,$$

on a alors

$$u'(x) = (n-1) \cos x \sin^{n-2}(x) \quad \text{et} \quad v(x) = -\cos x \, ,$$

et donc

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[-\cos x \sin^{n-1} x \Big]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \, dx \\ &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \, . \end{aligned}$$

On en déduit la relation de récurrence

$$n I_n = (n-1) I_{n-2} \, .$$

Cela permet de calculer la valeur de I_n. Il y a deux expressions différentes suivant la parité du nombre n.

On a tout d'abord

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi/2} = 1 \, .$$

En partant de la relation

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$$

on obtient alors

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} I_0 = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \pi = \binom{2n}{n} \frac{\pi}{2^{2n+1}} \, ,$$

et en partant de

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$$

on obtient

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\,I_1 = \frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{1}{\binom{2n}{n}}\,\frac{2^{2n}}{2n+1}\,.$$

On a alors, si $n \geq 0$,

$$a_{2n+1}I_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}\,(2n+1)^2}\,\frac{\binom{4n}{2n}}{\binom{2n}{n}}\,,$$

et pour $n \geq 1$,

$$a_{2n}I_{2n} = -\frac{\pi}{2^{6n+1}\,n}\binom{4n-2}{2n-1}\binom{2n}{n}\,.$$

De plus

$$a_0 = I_0 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Le début de la série entière est

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\,x - \frac{\pi}{32}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^3 - \frac{15\pi}{2048}\,x^4 + \frac{7}{480}\,x^5 + \cdots\,.$$

En effectuant le changement de variable

$$u = x\sin t\,,$$

c'est-à-dire

$$t = \arcsin\frac{u}{x}\,,$$

on a

$$dt = \frac{du}{\sqrt{x^2-u^2}}\,,$$

et on obtient

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{x^2-u^2}}\,du\,.$$

Remarque : cette dernière expression permet d'obtenir le développement limité de φ en 0 avec Maple par exemple.

Montrer que l'on définit une fonction f sur $[-1,\,1]$ en posant

$$f(x)=\int_0^\infty -\ln(1-xe^{-t})\,dt\,,$$

et déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f.

Pour x fixé dans $[-1,\,1[$, la fonction qui à t associe $-\ln(1-xe^{-t})$ est continue sur $[0,\,+\infty[$, et au voisinage de l'infini, on a

$$-\ln(1-xe^{-t})\sim xe^{-t}\,.$$

Comme $\int\limits_0^\infty e^{-t}\,dt$ converge, il en résulte que $\int\limits_0^\infty -\ln(1-xe^{-t})\,dt$ converge, et la fonction f est définie sur $[-1,\,1[$.

Il reste à étudier le cas où $x=1$. Soit φ la fonction définie sur $]0,\,+\infty[$ par

$$\varphi(t)=-\ln(1-e^{-t})\,.$$

Au voisinage de 0 on a

$$1-e^{-t}=t+\circ(t)\,,$$

d'où

$$\varphi(t)=-\ln(t+\circ(t))=-\ln t\left(1+\frac{\ln(1+\circ(1))}{\ln t}\right)\sim-\ln t\,,$$

Comme $\int\limits_0^1 \ln t\,dt$ converge, il en résulte que $\int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt$ converge.

Au voisinage de l'infini, on a

$$\varphi(t)\sim e^{-t}\,.$$

Comme $\int\limits_1^\infty e^{-t}\,dt$ converge, il en résulte que $\int\limits_1^\infty \varphi(t)\,dt$ converge.
Finalement φ est intégrable sur $]0,\,+\infty[$, et f est définie sur $[-1,\,1]$.

Si $-1\leq x\leq 1$ et $t>0$, posons

$$f_n(t)=\frac{1}{n}\,x^ne^{-nt}\,.$$

On a

$$\sum_{n=1}^\infty |f_n(t)|\leq\sum_{n=1}^\infty\frac{e^{-nt}}{t}=-\ln(1-e^{-t})=\varphi(t)\,.$$

Les sommes partielles de la série de fonctions continues f_n sont majorées par une fonction continue et intégrable sur $]0,\,+\infty[$. Il résulte alors du théorème de convergence dominée que

$$\int_0^\infty -\ln(1-xe^{-t})\,dt=\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty f_n(t)\,dt=\sum_{n=1}^\infty\frac{x^n}{n^2}\,.$$

1) Pour quelles valeurs réelles de t, la série de terme général $1/n^t$ converge-t-elle ? On note alors
$$\zeta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}\,.$$
2) Montrer que la série de terme général $1/(n^2 - x^2)$ converge si $|x| < 1$. On note
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}\,.$$
3) Trouver le développement en série entière de S au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence R de cette série ?

1) La série de Riemann de terme général $1/n^t$ converge si et seulement si $t > 1$.

2) Quand n tend vers l'infini, on a, pour tout x fixé
$$\frac{1}{n^2 - x^2} \sim \frac{1}{n^2}$$
et la série de terme général $1/(n^2 - x^2)$ converge par comparaison à une série de Riemann.

3) Si $|x| < 1$ et $n \geq 1$, on a $|x|/n < 1$ et
$$\frac{1}{n^2 - x^2} = \frac{1}{n^2}\,\frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2}} = \frac{1}{n^2}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^{2p}\,.$$
En inversant les sommations, ce qui est possible puisque tous les termes sont positifs, on a
$$S(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(p+1)}}\right) x^{2p} = \sum_{p=0}^{\infty} \zeta(2p+2)\, x^{2p}\,.$$
Comme ce calcul est valable si $|x| < 1$, on a donc $R > 1$. Par ailleurs, en raison de la positivité, on a
$$S(x) \geq S_1(x) = \frac{1}{1 - x^2}\,,$$
ce qui montre que
$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = +\infty\,.$$
Il en résulte que $R > 1$, sinon, la somme de la série aurait une limite finie en 1. Finalement $R = 1$.

Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction f définie par

$$f(x) = (\arctan x)^2 .$$

Préciser le rayon de convergence R et étudier ce qui se passe si $x = \pm R$.

Pour x dans $]-1,\, 1[$ on a

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} x^{2n+1} .$$

La fonction f est donc le produit de Cauchy de deux séries de rayon 1 et l'on a $R \geq 1$.

La fonction f est paire, et s'annule en 0. On a donc

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{2n} x^{2n} .$$

Le coefficient a_{2n} est la somme des produits $b_{2p+1} b_{2q+1}$ tels que

$$(2p+1) + (2q+1) = 2n ,$$

c'est-à-dire

$$q = n - 1 - p .$$

On a donc

$$a_{2n} = \sum_{p=0}^{n-1} b_{2p+1} b_{2n-2p-1} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p}{2p+1} \frac{(-1)^{n-p-1}}{2n-2p-1} .$$

En décomposant en éléments simples, on obtient

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2n-2p-1} \right) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \left(\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2n-2p-1} \right) . \end{aligned}$$

Mais les deux sommes figurant dans l'expression précédente sont les mêmes, et l'on obtient finalement

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1} .$$

On a en particulier

$$|a_{2n}| \geq \frac{1}{n} ,$$

et l'on en déduit que le rayon de la série entière de coefficient a_{2n} est inférieur à 1 par comparaison à la série entière de coefficient $1/n$. Finalement $R = 1$.

On peut encadrer la suite $(s_n)_{n\geq 0}$, définie par

$$s_n = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1}\,.$$

On a

$$\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p+1} \leq s_n \leq 1 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}\,,$$

et puisque

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \sim \ln n\,,$$

on en déduit que

$$s_n \sim \frac{\ln n}{2}\,.$$

En particulier (s_n) admet $+\infty$ pour limite et (a_{2n}) converge vers 0.

Alors

$$|a_{2n}| - |a_{2n+1}| = \frac{s_n}{n} - \frac{s_{n+1}}{n+1} = \frac{s_{n+1}}{n} - \frac{1}{n(2n+1)} - \frac{s_{n+1}}{n+1}\,,$$

ce que l'on peut écrire

$$|a_{2n}| - |a_{2n+1}| = \frac{s_{n+1}}{n(n+1)}\left(1 - \frac{n+1}{2n+1}\,\frac{1}{s_{n+1}}\right)\,.$$

On en déduit que

$$|a_{2n}| - |a_{2n+1}| \sim \frac{s_{n+1}}{n(n+1)}\,,$$

et la différence $|a_{2n}| - |a_{2n+1}|$ est positive à partir d'un certain rang. Alors la série de terme général a_{2n} est alternée à partir d'un certain rang et la série entière converge si $x = \pm 1$.

Déterminer de deux manières le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = e^{(x+1)^2}\,.$$

La série entière de l'exponentielle étant de rayon infini, les calculs suivants ont lieu pour tout x réel ou complexe.

On a tout d'abord

$$f(x) = e^{1+2x+x^2} = e \cdot e^{2x} e^{x^2}\,.$$

En utilisant le produit de Cauchy, on obtient,

$$\begin{aligned} f(x) &= e \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}\right) \\ &= e \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p+2q=n} \frac{2^p}{p!q!}\right) x^n \\ &= e \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \frac{2^{n-2q}}{q!(n-2q)!}\right) x^n\,, \end{aligned}$$

où $\mathrm{E}(r)$ désigne la partie entière du nombre r.

On peut également écrire

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2p}}{p!}\,,$$

et développer par la formule du binôme.

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{2p} \binom{2p}{n} \frac{1}{p!}\, x^n\,.$$

La convergence absolue de la somme double permet d'intervertir les sommations. On a alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p \geq n/2} \binom{2p}{n} \frac{1}{p!}\right) x^n\,.$$

Si $n = 2s$ ou $n = 2s - 1$, on a alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=s}^{\infty} \frac{(2p)!}{p!(2p-n)!}\right) \frac{x^n}{n!}\,.$$

Pour tout entier naturel n, on en déduit l'égalité

$$\sum_{p=s}^{\infty} \frac{(2p)!}{p!(2p-n)!} = e \sum_{q=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \frac{2^{n-2q} n!}{q!(n-2q)!}\,.$$

Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction f définie par

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^6}\,.$$

Préciser le rayon de convergence R.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{1}{1+x^6}$$

et G une primitive de g. On a alors

$$f(x) = G(2x) - G(x)\,.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x)\,.$$

La fonction g est développable au voisinage de 0 en série entière de rayon 1,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{6n}\,.$$

Alors la fonction qui à x associe $g(2x)$ est développable au voisinage de 0 en série entière de rayon 1/2

$$g(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n}}{2^{6n}}\,.$$

Finalement f' est développable au voisinage de 0 en série entière de rayon 1/2

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{6n-1}} - 1 \right) x^{6n}\,.$$

Puisque la fonction f est nulle en 0, on a alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{6n-1}} - 1 \right) \frac{x^{6n+1}}{6n+1}\,,$$

et cette série entière est de rayon $R = 1/2$.

Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction f définie par

$$f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt\,.$$

Préciser le rayon de convergence.

Soit g définie par
$$g(x) = e^{-x^2}\,,$$
et G une primitive de g. On a alors
$$f(x) = G(2x) - G(x)\,,$$
et donc en dérivant
$$f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}\,.$$
En utilisant la série de l'exponentielle on obtient alors
$$f'(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2^{2n+1}-1)}{n!}\,x^{2n}\,.$$
Cette série est de rayon infini, puisque la série de l'exponentielle est de rayon infini.

Alors en intégrant terme à terme on obtient une série de rayon infinie, et puisque $f(0) = 0$,
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2^{2n+1}-1)}{(2n+1)n!}\,x^{2n+1}\,.$$

Chapitre 4

SOMME DE SÉRIES NUMÉRIQUES

Montrer l'existence et calculer

$$A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad \text{et} \quad A_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,.$$

Les deux séries sont des séries alternées qui convergent d'après le critère de Leibniz.

Introduisons les séries entières de coefficients $(-1)^{n-1}/n$ et $(-1)^n/(2n+1)$. Ces séries sont de rayon 1 et l'on a, pour x de $]-1,\,1[$,

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$$

et

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x\,.$$

Dans ce qui suit, nous donnons une démonstration directe, sans invoquer le théorème d'Abel.

Pour x dans $[0,\,1]$ et $n \geq 1$, posons

$$u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\,.$$

On a

$$|u_n(x)| - |u_{n+1}(x)| = \frac{x^n}{n} \left(1 - \frac{n}{n+1}\,x\right) \geq 0\,.$$

La suite $(|u_n(x)|)$ est décroissante et converge vers 0. La série de terme général $u_n(x)$ est alternée, et d'après le critère de Leibniz, on a, pour $n \geq 1$ et x dans $[0,\,1]$, l'inégalité

$$\left| S(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)|\,.$$

Mais
$$|u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n}\,.$$
et la suite $(1/n)$ converge vers 0. Il en résulte que la série de terme général u_n converge uniformément sur l'intervalle $[\,0,\,1\,]$.

On peut alors conclure : comme les fonctions u_n sont continues sur $[\,0,\,1\,]$, la somme f_1 l'est aussi, et en particulier elle est continue en 1, donc
$$A_1 = \lim_{x\to 1^-} f_1(x) = \ln 2\,.$$
Par le même argument, on obtient
$$A_2 = \lim_{x\to 1^-} f_2(x) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}\,.$$

Calculer
$$A = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^{-n}\,.$$

Introduisons la série entière de coefficient
$$a_n = (n+1)$$
et de rayon R. La limite de a_n/a_{n+1} vaut $R = 1$, et en posant
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,,$$
on a
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}\,.$$
Donc
$$A = f'(1/2) = 4\,.$$

Montrer que la série de terme général $(-1)^n\dfrac{n+5}{(n+1)(n+2)}$ converge et calculer sa somme.

Posons
$$a_n = (-1)^n\frac{n+5}{(n+1)(n+2)}\,.$$

On a

$$|a_n| \sim \frac{1}{n}\,,$$

et la suite (a_n) converge vers 0. D'autre part, si l'on pose

$$f(x) = \frac{x+5}{(x+1)(x+2)}\,,$$

on obtient

$$f'(x) = -\frac{x^2+10x+13}{[(x+1)(x+2)]^2}\,,$$

et comme cette fonction est négative sur $[\,0,\,+\infty\,[$, la fonction f est décroissante sur cet intervalle, et la suite $(a_n) = (f(n))$ également. La série étudiée est une série décroissante alternée et converge donc.

Pour la calculer introduisons la série entière de coefficients a_n et de rayon R. Le rapport $(|a_n/a_{n+1}|)$ converge vers $R = 1$. Calculons

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

En écrivant

$$\frac{n+5}{(n+1)(n+2)} = \frac{4}{n+1} - \frac{3}{n+2}\,,$$

Les séries entières de coefficients $(-1)^n/(n+1)$ et $(-1)^n/(n+2)$ sont de rayon 1, et donc, pour tout x de $]-1,\,1\,[$, on a

$$S(x) = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n+1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n+2}\,.$$

Alors, si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{4}{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \frac{3}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+2}}{n+2} \\ &= \frac{4}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \frac{3}{x^2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \\ &= \frac{4}{x}\ln(1+x) + \frac{3}{x^2}\,(\ln(1+x) - x)\,. \end{aligned}$$

Finalement

$$S(x) = \frac{4x+3}{x^2}\,\ln(1+x) - \frac{3}{x}\,.$$

Mais lorsque x tend vers 1, on peut appliquer le théorème d'Abel, et

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1_-} S(x) = 7\ln 2 - 3\,.$$

Montrer l'existence et calculer
$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}\,.$$

Puisque
$$\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}\,,$$
la série de terme général
$$a_n = \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$$
converge absolument, par comparaison à une série de Riemann. Donc A existe, et pour le calculer, on peut introduire la série entière de coefficient $1/(n(n+1))$ et de rayon R. Le rapport $(|a_n|/|a_{n+1}|)$ converge vers $R = 1$.

Pour tout x de $]-1,\,1[$, posons
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}\,.$$
Pour calculer la somme $S(x)$ on écrit
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\,.$$
Les séries entières de coefficients $1/n$ et $1/(n+1)$ sont de rayon de convergence 1, donc, lorsque $|x| < 1$,
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}\,.$$
Alors, lorsque $x \neq 0$, on a
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\,,$$
et donc
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) - \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x\right) = 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)\,.$$
On peut appliquer le théorème d'Abel et l'on obtient
$$A = \lim_{x \to -1} S(x) = 1 - 2\ln 2\,.$$

Calculer
$$A = \frac{1}{1\times 2} - \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{5\times 6} - \frac{1}{7\times 8} + \cdots .$$

On veut donc calculer la somme
$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} .$$

La série de terme général
$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$
converge absolument puisque l'équivalence
$$|a_n| \sim \frac{1}{4n^2} ,$$
permet de comparer à une série de Riemann.

Pour la calculer introduisons la série entière de rayon R,
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} .$$

La limite de $|a_n|/|a_{n+1}|$ vaut R^2. On a donc $R = 1$, et, en décomposant en éléments simples,
$$\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} .$$

Les séries entières de coefficients $(-1)^n/(2n+1)$ et $(-1)^n/(2n+2)$ sont de rayon de convergence 1, et donc, pour tout x tel que $|x| < 1$, on a
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+2} .$$

Alors, lorsque x appartient à $]\,0,\,1\,[$,
$$S(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2(n+1)}}{n+1} ,$$
ce qui donne
$$S(x) = \frac{1}{x}\, \arctan x - \frac{1}{2x^2}\, \ln(1+x^2) .$$

Mais lorsque x tend vers 1, on peut appliquer le théorème d'Abel, et
$$A = \lim_{x\to 1_-} S(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} .$$

Calculer
$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2) \times 27^n}\,.$$

Introduisons la série entière
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}\,.$$
Ce choix permet de dériver facilement. En effet
$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1} = \frac{x}{1-x^3}\,,$$
avec $S(0) = 0$. On obtient une série géométrique donc $S'(x)$ et $S(x)$ sont des séries de rayon de convergence 1.

Il reste à calculer une primitive de $S'(x)$ en décomposant en éléments simples la fraction rationnelle $x/(1-x^3)$. Le polynôme $P(x) = 1 - x^3$ a trois racines simples complexes α_i $(1 \leq i \leq 3)$ telles que
$$\alpha_i^3 = 1\,.$$
Le coefficient de $1/(x-\alpha_i)$ dans la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de $x/P(x)$ est donc
$$\frac{\alpha_i}{P'(\alpha_i)} = \frac{\alpha_i}{-3\alpha_i^2} = -\frac{\alpha_i^2}{3}\,.$$
En prenant $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = \bar{\alpha}_3 = j$, on obtient donc
$$\frac{x}{1-x^3} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{j^2}{x-j} + \frac{j}{x-j^2}\right)\,,$$
et en regroupant les termes conjugués,
$$\frac{x}{1-x^3} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{x(j+j^2)-(j+j^2)}{x^2+x+1}\right) = -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{3}\,\frac{x-1}{x^2+x+1}\,.$$
En faisant apparaître la dérivée du dénominateur on obtient
$$\frac{x}{1-x^3} = -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{6}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1}\,,$$
ce qui donne comme primitive si $x < 1$,
$$h(x) = \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{3}\ln(1-x) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\,.$$

On a
$$h(0) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6}\,.$$
Alors $S(x)$ est la primitive de $x/(1-x^3)$ nulle en 0, donc
$$S(x) = h(x) - h(0) = \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{3} \ln(1-x) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\,.$$
Comme la série entière $S(x)$ est de rayon de convergence 1, on a en particulier,
$$A = 9S(1/3) = \frac{3}{2} \ln 13 - 3\ln 2 - 3\sqrt{3} \arctan \frac{5}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\,.$$

Calculer
$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}\,.$$

La série de terme général
$$a_n = \frac{(-1)^n}{4n+1}$$
converge d'après le critère de Leibniz. Pour la calculer, introduisons la série entière
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1}\,.$$
On a alors
$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} = \frac{1}{1+x^4}$$
avec $S(0)=0$. On obtient une série géométrique donc $S'(x)$ et $S(x)$ sont des séries de rayon de convergence 1.

Il reste à calculer une primitive de $S'(x)$ en décomposant en éléments simples la fraction rationnelle $1/P(x)$. Le polynôme $P(x) = x^4+1$ a quatre racines simples complexes α_i $(1 \leq i \leq 4)$ telles que
$$\alpha_i^4 = -1\,.$$
Le coefficient de $1/(x-\alpha_i)$ dans la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de $1/P(x)$ est donc
$$\frac{1}{P'(\alpha_i)} = \frac{1}{4\alpha_i^3} = -\frac{\alpha_i}{4}\,.$$
En prenant $\alpha_1 = \bar{\alpha}_2 = e^{i\pi/4}$, et $\alpha_3 = \bar{\alpha}_4 = e^{3i\pi/4}$, on obtient donc
$$\frac{1}{x^4+1} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\alpha_1}{x-\alpha_1} + \frac{\bar{\alpha}_1}{x-\bar{\alpha}_1} + \frac{\alpha_3}{x-\alpha_3} + \frac{\bar{\alpha}_3}{x-\bar{\alpha}_3} \right)\,.$$

et en regroupant les termes conjugués,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4+1} &= -\frac{1}{4}\left(\frac{2\,\mathrm{Re}\,\alpha_1\,x-2}{x^2-2\,\mathrm{Re}\,\alpha_1\,x+1}+\frac{2\,\mathrm{Re}\,\alpha_3\,x-2}{x^2-2\,\mathrm{Re}\,\alpha_3\,x+1}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}\,x-2}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}+\frac{-\sqrt{2}\,x-2}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\right).\end{aligned}$$

En faisant apparaître la dérivée des dénominateurs

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4+1} &= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}-\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}+\frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\right).\end{aligned}$$

On obtient comme primitive de $\dfrac{1}{x^4+1}$,

$$\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan(\sqrt{2}\,x+1)+\arctan(\sqrt{2}\,x-1)\right),$$

et comme cette primitive s'annule en 0, c'est donc $S(x)$.

Il résulte alors du théorème d'Abel que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}=\lim_{x\to 1^-}S(x)\,,$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan(\sqrt{2}-1)+\arctan(\sqrt{2}+1)\right).$$

Mais

$$\sqrt{2}+1=(\sqrt{2}-1)^{-1}\,,$$

et lorsque $u>0$,

$$\arctan u+\arctan\frac{1}{u}=\frac{\pi}{2}\,.$$

On a aussi

$$\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2\,,$$

ce qui permet d'écrire

$$A=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}+1)+\frac{\sqrt{2}}{8}\pi\,.$$

Convergence et calcul de
$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}\,.$$

On utilise la relation
$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,,$$
et donc
$$a_n=\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}\sim\frac{3}{n^3}\,,$$
ce qui montre que la série de terme général a_n converge par comparaison à une série de Riemann.

Pour la calculer, introduisons la série entière de rayon R
$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\,.$$

Cette série est de rayon de convergence 1 puisque la suite (a_n/a_{n+1}) converge vers $R=1$. On calcule $S(x)$ en décomposant a_n en éléments simples. On a
$$\frac{1}{X(X+1)(2X+1)}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{2X+1}\,.$$
En multipliant par X et en donnant à X la valeur 0, on trouve $a=1$.
En multipliant par $X+1$ et en donnant à X la valeur -1, on trouve $b=1$.
En multipliant par $2X+1$ et en donnant à X la valeur $-1/2$, on trouve $c=-4$.

Donc
$$S(x)=6\,\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right]\,.$$
Toutes les séries sont de rayon de convergence 1, et, lorsque $0<x<1$, on a
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\,.$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\,(-\ln(1-x)-x)\,.$$

Pour obtenir la somme de la troisième série, remarquons que la dérivée de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ vaut
$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)\,.$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Alors, lorsque $0 < x < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{2n+1} - 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - 1,$$

et finalement

$$\begin{aligned} S(x) &= 6\left[-\ln(1-x) - \frac{\ln(1-x)}{x} - 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + 4\right] \\ &= 6\left[-\frac{1+x}{x} \ln(1-x) + 3 - \frac{2}{\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right]. \end{aligned}$$

En écrivant

$$\ln(1-x) = \ln(1+\sqrt{x}) + \ln(1-\sqrt{x}),$$

on trouve

$$S(x) = 18 - \frac{6}{x} \left[(1+\sqrt{x})^2 \ln(1+\sqrt{x}) + (1-\sqrt{x})^2 \ln(1-\sqrt{x})\right].$$

Alors, on obtient, d'après le théorème d'Abel,

$$A = \lim_{x \to 1^-} S(x) = 18 - 24 \ln 2.$$

Soit A un entier supérieur ou égal à 2, et $p(n)$ le nombre de chiffres du nombre entier naturel n dans son écriture en base A. Après en avoir vérifié l'existence, calculer

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(n)}{n(n+1)}.$$

Dire que $p(n) = N + 1$ équivaut à dire que

$$A^N \leq n \leq A^{N+1} - 1.$$

En particulier, on a

$$A^{p(n)-1} \leq n,$$

donc

$$p(n) \leq \frac{\ln n}{\ln A} + 1,$$

et par suite

$$0 \leq \frac{p(n)}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \frac{\ln n}{\ln A} + \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de Bertrand de terme général $\ln n/n^2$ converge ainsi que la série de Riemann de terme général $1/n^2$, il en résulte que la série de terme général $p(n)/(n(n+1))$ converge aussi.

Puisque la suite des sommes partielles de la série est une suite croissante positive, on a alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(n)}{n(n+1)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{A^{N+1}-1} \frac{p(n)}{n(n+1)} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=A^p}^{A^{p+1}-1} \frac{p(n)}{n(n+1)} .$$

Mais

$$\begin{aligned} \sum_{n=A^p}^{A^{p+1}-1} \frac{p(n)}{n(n+1)} &= (p+1) \sum_{n=A^p}^{A^{p+1}-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= (p+1)\left(\frac{1}{A^p} - \frac{1}{A^{p+1}}\right) = \frac{(A-1)(p+1)}{A^{p+1}} . \end{aligned}$$

et l'on obtient finalement

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(n)}{n(n+1)} = \frac{A-1}{A} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p+1}{A^p} .$$

En utilisant la série entière,

$$\sum_{p=0}^{\infty} x^p = \frac{1}{1-x}$$

de rayon de convergence 1 et en dérivant, on trouve

$$\sum_{p=0}^{\infty} (p+1)x^p = \frac{1}{(1-x)^2} .$$

Donc

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{p+1}{A^p} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{A}\right)^2} = \left(\frac{A}{A-1}\right)^2 ,$$

et finalement

$$S = \frac{A}{A-1} .$$

Etudier la nature et calculer la somme de la série de terme général

$$a_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} .$$

Comme la série de terme général $(-1)^k/k^2$ est une série alternée, on a

$$|a_n| \leq \frac{1}{n^2}\,,$$

et la série de terme général a_n converge absolument.

Introduisons la série entière

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,,$$

et soit R son rayon de convergence. Puisque la série converge lorsque $x = 1$, on a $R \geq 1$. Alors lorsque $0 < x < 1$, on peut appliquer le théorème de Fubini à la somme double

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^n}{k^2}\,,$$

et l'on obtient

$$U(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \frac{x^n}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,\frac{x - x^{k+1}}{1-x}\,.$$

Mais, puisque

$$0 \leq \frac{1}{k^2}\,\frac{x - x^{k+1}}{1-x} \leq \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{k^2}\,,$$

la somme double $U(x)$ est donc finie. Alors il en résulte que la somme double

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k x^n}{k^2}$$

est finie, et que, lorsque $0 < x < 1$, on a, d'après le théorème de Fubini,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{x^n}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} (-1)^k \frac{x^n}{k^2} = x\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\,\frac{x^k - 1}{x-1}\,.$$

Posons

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}\,,$$

et prolongeons f par continuité en 0 par la valeur $f(0) = 1$. On définit ainsi une fonction continue sur $[\,0,\,1\,]$, et, lorsque $0 \leq x < 1$, on a,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{k-1}}{k}\,.$$

Lorsque x tend vers 1, on obtient d'après le théorème d'Abel,

$$f(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2\,.$$

La fonction f admet une primitive F sur $[0,\,1]$, nulle en 0. Lorsque $0 \leq x < 1$ on a alors

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k^2}\,,$$

et, lorsque x tend vers 1, on obtient d'après le théorème d'Abel,

$$F(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\,.$$

Alors

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = f(1)\,.$$

Mais

$$\frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \frac{x^k - 1}{x - 1} = -\frac{S(x)}{x}\,.$$

Alors, toujours d'après le théorème d'Abel,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1^-} S(x) = -F'(1) = -f(1) = -\ln 2\,.$$

Montrer que pour tout entier naturel p, la série de terme général $n^p/2^n$ converge et que

$$S_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p}{2^n}$$

est un nombre entier naturel pair. Calculer S_p lorsque p appartient à l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$.

Introduisons la série entière

$$U_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^p x^n\,.$$

La critère d'Alembert montre que cette série et de rayon 1. En particulier elle converge pour $x = 1/2$, ce qui montre que la série de terme général $n^p/2^n$ converge et que

$$S_p = U_p(1/2)\,.$$

Dans ce cas S_p est un nombre positif.

On a

$$U_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}\,,$$

et on remarque que si $|x| < 1$,

$$U'_{p-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p x^{n-1} \,,$$

donc

$$U_p(x) = xU'_{p-1}(x) \,.$$

Cela permet de calculer les premières séries.

$$U_1(x) = xU'_0(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \,,$$

puis

$$U_2(x) = xU'_1(x) = x\left[\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3}\right] = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \,,$$

et enfin

$$U_3(x) = xU'_2(x) = x\left[\frac{1+2x}{(1-x)^3} + \frac{3x(1+x)}{(1-x)^4}\right] = \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4} \,.$$

On en tire alors

$$S_0 = 2 \quad , \quad S_1 = 2 \quad , \quad S_2 = 6 \quad , \quad S_3 = 26 \,.$$

De manière générale, on montre par récurrence que

$$U_p(x) = \frac{P_p(x)}{(1-x)^{p+1}}$$

où P_p est un polynôme à coefficients entiers de degré p dont le coefficient a_p de x^p vaut 1. C'est vrai pour les premières valeurs de p. Supposons la propriété vraie à l'ordre $p-1$. Donc

$$U_{p-1}(x) = \frac{P_{p-1}(x)}{(1-x)^p} \,.$$

Alors

$$U_p(x) = xU'_{p-1}(x) = x\,\frac{(1-x)P'_{p-1}(x) + pP_{p-1}(x)}{(1-x)^{p+1}} \,.$$

Soit alors $P_p(x)$ le polynôme défini par

$$P_p(x) = xpP_{p-1}(x) + x(1-x)P'_{p-1}(x) \,.$$

Comme P_{p-1} est à coefficient entier, il en est de même de P'_{p-1} et donc de P_p.

Comme P_{p-1} est de degré $p-1$, alors P'_{p-1} est de degré $p-2$ au plus, et les polynômes $xP_{p-1}(x)$ et $x(1-x)P'_{p-1}(x)$ sont de degré au plus p. Cherchons le coefficient de x^p. On a

$$a_p = pa_{p-1} - (p-1)a_{p-1} = a_{p-1} \,,$$

donc tous les nombres a_p sont égaux à 1.

Posons

$$P_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k x^k \,.$$

Alors

$$S_p = U_p(1/2) = 2^{p+1} P_p(1/2) = 2 \sum_{k=0}^{p} \alpha_k 2^{p-k} \,,$$

ce qui montre que S_p est un nombre entier pair.

Pour tout couple (n,p) de $\mathbb{N}^2$ on pose

$$a_{n,p} = \int_0^1 x^p (\ln x)^n \, dx \,.$$

1) Calculer $a_{n,p}$.
2) Calculer

$$A_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_{n,p}} \,.$$

3) Calculer

$$A = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \,.$$

1) En intégrant par parties, on obtient

$$a_{n,p} = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} (\ln x)^n \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} \, \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x} \, dx = -\frac{n}{p+1} a_{n-1,p} \,.$$

Comme

$$a_{0,p} = \int_0^1 x^p \, dx = \frac{1}{p+1} \,,$$

on en déduit alors par récurrence sur n que

$$a_{n,p} = \frac{(-1)^n n!}{(p+1)^{n+1}} \,.$$

2) Alors

$$A_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_{n,p}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(p+1)^{n+1}}{n!} = (p+1) e^{-(p+1)} \,.$$

3) Ensuite

$$A = \sum_{p=0}^{\infty} A_p = \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)e^{-(p+1)}\,.$$

En posant, si $|x| < 1$,

$$S(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)x^p\,,$$

cette fonction est la dérivée de

$$\sum_{p=0}^{\infty} x^p = \frac{1}{1-x}\,,$$

donc

$$S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\,,$$

puis

$$A = \frac{1}{e}\,S(1/e) = \frac{e}{(e-1)^2}\,.$$

Si $|q| < 1$, calculer la somme

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \frac{q^{i+j}}{(2j)!}\,.$$

En écrivant

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \frac{q^{i+j}}{(2j)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \frac{q^{2j}}{(2j)!}\, q^{i-j}\,,$$

la somme cherchée est le produit de Cauchy

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} q^i\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{2j}}{(2j)!}\right)\,,$$

et donc

$$S = \frac{\operatorname{ch} q}{1-q}\,.$$

Comme chacune des séries converge absolument si $|q| < 1$, le résultat est vrai pour ces valeurs de q.

Si $|p| + |q| < 1$, calculer la somme

$$S = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \binom{i+j}{i} p^i q^j\,.$$

On calcule tout d'abord la somme

$$T = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \binom{i+j}{i} |p|^i |q|^j \,.$$

On peut l'écrire

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} \binom{i+j}{i} |p|^i |q|^j = \sum_{k=0}^{\infty} (|p|+|q|)^k = \frac{1}{1-(|p|+|q|)} \,.$$

La somme converge absolument, et l'on peut utiliser le théorème de Fubini, ce qui donne

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} \binom{i+j}{i} p^i q^j = \sum_{k=0}^{\infty} (p+q)^k = \frac{1}{1-(p+q)} \,.$$

Si $|q| < 1$,montrer que l'on a l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{q^n}{1-q^{2n+1}} \,.$$

On considère la somme double

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^n q^{n+m+2nm} \,.$$

On calcule tout d'abord la somme

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |q|^{n+m+2nm} \,.$$

On a

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} |q|^n \left(\sum_{m=0}^{\infty} |q|^{(2n+1)m} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|q|^n}{1-|q|^{2n+1}} \,.$$

Mais, quand n tend vers l'infini

$$\frac{|q|^n}{1-|q|^{2n+1}} \sim |q|^n$$

et la série de terme général $\frac{|q|^n}{1-|q|^{2n+1}}$ converge. Donc la somme double T converge, et l'on peut utiliser le théorème de Fubini, ce qui donne, d'une part

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^n \left(\sum_{m=0}^{\infty} q^{(2n+1)m} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1-q^{2n+1}} \,,$$

et d'autre part

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} q^m \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(2m+1)n} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{1+q^{2m+1}} ,$$

d'où l'égalité demandée.

Calculer, pour $|x| < 1$, la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \ln(1 + x^{2^n}) .$$

En déduire que pour tout entier naturel strictement positif s,

$$\sum_{\{(n,p)\,|\,p2^n = s\}} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = \frac{1}{s} .$$

Vérifier directement cette formule.

On montre par récurrence sur N, que, si $|x| < 1$, on a, pour tout entier naturel N,

$$\prod_{n=0}^{N} (1 + x^{2^n}) = \sum_{n=0}^{2^{N+1}-1} x^n = \frac{1 - x^{2^{N+1}}}{1 - x} .$$

C'est vrai si $N = 0$ car

$$1 + x = \frac{1 - x^2}{1 - x} .$$

Si l'on suppose que la formule est vraie à l'ordre N, alors

$$\prod_{n=0}^{N+1} (1 + x^{2^n}) = (1 + x^{2^{N+1}}) \frac{1 - x^{2^{N+1}}}{1 - x} = \frac{1 - x^{2 \cdot 2^{N+1}}}{1 - x} = \frac{1 - x^{2^{N+2}}}{1 - x} .$$

La formule est vraie à l'ordre $N + 1$, donc pour tout entier naturel N.

On obtient

$$\sum_{n=0}^{N} \ln(1 + x^{2^n}) = \ln \left(\prod_{n=0}^{N} (1 + x^{2^n}) \right) = \ln \frac{1 - x^{2^{N+1}}}{1 - x} = -\ln(1 - x) + \ln(1 - x^{2^{N+1}}) .$$

Lorsque N tend vers l'infini, cette suite converge vers $-\ln(1 - x)$, d'où

$$S(x) = -\ln(1 - x) .$$

En développant en série entière, on a

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p-1}\,\frac{x^{p2^n}}{p}\,.$$

Vérifions que la somme double précédente converge absolument. On étudie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{|x|^{p2^n}}{p} = -\sum_{n=0}^{\infty}\ln(1-|x|^{2^n})\,.$$

Quand n tend vers l'infini, on a,

$$-\ln(1-|x|^{2^n}) \sim |x|^{2^n}\,.$$

Mais

$$\frac{|x|^{2^{n+1}}}{|x|^{2^n}} = |x|^{2^{n+1}-2^n} = |x|^{2^n}\,,$$

et cette suite converge vers 0. Il résulte de la règle d'Alembert que la série de terme général $|x|^{2^n}$ converge, donc que la série de terme général $-\ln(1-|x|^{2^n})$ converge, ce qui assure la convergence absolue de la somme double.

On peut alors calculer $S(x)$ en regroupant les termes suivant les puissances de x, ce qui donne

$$S(x) = \sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{\{(n,p)\,|\,p2^n=s\}}\frac{(-1)^{p-1}}{p}\right)x^s\,.$$

Par ailleurs

$$S(x) = -\ln(1-x) = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{x^s}{s}\,,$$

et en identifiant les développements en série entière on obtient

$$\sum_{\{(n,p)\,|\,p2^n=s\}}\frac{(-1)^{p-1}}{p} = \frac{1}{s}\,.$$

On peut calculer directement la somme de gauche. Ecrivons s en mettant en facteur les puissances de 2 sous la forme

$$s = 2^q(2r+1)\,.$$

L'égalité

$$s = p2^n$$

a lieu lorsque

$$0 \leq n \leq q \quad \text{et} \quad p = 2^{q-n}(2r+1)\,.$$

Alors

$$\sum_{\{(n,p)\,|\,p2^n=s\}}\frac{(-1)^{p-1}}{p} = \sum_{n=0}^{q}\frac{(-1)^{2^{q-n}(2r+1)-1}}{2^{q-n}(2r+1)}\,.$$

Le nombre $2^{q-n}(2r+1)-1$ est impair si $q>n$ et pair si $q=n$, donc

$$\begin{aligned}
\sum_{\{(n,p)\,|\,p2^n=s\}} \frac{(-1)^{p-1}}{p} &= \frac{1}{2r+1}\left(1-\sum_{n=0}^{q-1}\frac{1}{2^{q-n}}\right)\\
&= \frac{1}{2r+1}\left(1-\sum_{n=1}^{q}\frac{1}{2^{n}}\right)\\
&= \frac{1}{2r+1}\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{1-\frac{1}{2^q}}{1-\frac{1}{2}}\right)\\
&= \frac{1}{(2r+1)2^q}=\frac{1}{s}\,.
\end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat.

1) Trouver le rayon de convergence R et la nature, si $|x|=R$, de la série entière de coefficient

$$a_n=\frac{1}{n^2}\,.$$

On pose

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\,.$$

2) Montrer que, si $|x|\leq R$, on a

$$S(x)=\int_0^x \frac{-\ln(1-t)}{t}\,dt\,.$$

3) En intégrant par parties, montrer que si x appartient à $]\,0,\,1\,[$, on a

$$S(x)+S(1-x)=S(1)-\ln x\ln(1-x)\,,$$

et en déduire $S(1/2)$.

1) On a

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)^2}{n^2}\,,$$

et cette suite converge vers $R=1$. Par ailleurs, si $|x|\leq 1$

$$|a_nx^n|\leq\frac{1}{n^2}\,.$$

Comme la série de terme général $1/n^2$ converge, la série de terme général $a_n x^n$ converge absolument uniformément sur $[-1,\,1]$. La fonction S est alors continue sur $[-1,\,1]$.

2) Sur $]-1,\,1[$, on a
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}\,.$$
Si $x \neq 0$, on a donc
$$S'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}\,,$$
et cette fonction se prolonge en 0 par la valeur $S'(0) = 1$. Alors, puisque $S(0)$ est nul, on obtient
$$S(x) = \int_0^x \frac{-\ln(1-t)}{t}\,dt\,,$$
et par continuité, cette relation est vraie sur $[-1,\,1]$.

3) Si x appartient à $]0,\,1[$, on a, en intégrant par parties,
$$S(x) = \Big[-\ln t \ln(1-t)\Big]_0^x - \int_0^x \frac{\ln t}{1-t}\,dt\,.$$
Puisque l'on a au voisinage de 0,
$$-\ln t \ln(1-t) \sim t \ln t\,,$$
cette expression tend vers 0 en 0. Alors en effectuant le changement de variable $u = 1-t$ dans l'intégrale du membre de droite, on obtient
$$S(x) = -\ln x \ln(1-x) + \int_1^{1-x} \frac{\ln(1-u)}{u}\,du\,.$$
soit
$$S(x) = -\ln x \ln(1-x) + \int_0^{1-x} \frac{\ln(1-u)}{u}\,du - \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,du\,,$$
ce qui donne
$$S(x) = -\ln x \ln(1-x) - S(1-x) + S(1)\,.$$
En particulier, si $x = 1/2$,
$$2S(1/2) = -(\ln 2)^2 + S(1)\,,$$
et donc
$$S(1/2) = \frac{1}{2}\left(-(\ln 2)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}\,.$$

1) Calculer l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t \, dt\,.$$

2) Calculer la somme de la série de terme général

$$a_n = \frac{2^{2n}(n-1)!n!}{(2n+1)!}\,.$$

1) Pour $n \geq 0$, cette intégrale de Wallis se calcule en intégrant par parties. Si l'on pose

$$u(t) = \sin^{2n} t \quad \text{et} \quad v'(t) = \sin t\,,$$

on a alors

$$u'(t) = 2n \cos t \sin^{2n-1} t \quad \text{et} \quad v(t) = -\cos t\,,$$

et donc

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[-\cos t \sin^{2n} t \Big]_0^{\pi/2} + 2n \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^{2n-1} t \, dt \\ &= 2n \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \sin^{2n-1} t \, dt \\ &= 2nI_{n-1} - 2nI_n\,. \end{aligned}$$

On en déduit la relation de récurrence

$$(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}\,,$$

avec de plus

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = 1\,.$$

On a alors

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}\,,$$

d'où l'on déduit

$$I_n = \frac{(2n)\cdots 2}{(2n+1)\cdots 3} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\,.$$

2) Si $n \geq 1$, on a donc

$$a_n = \frac{I_n}{n} = \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t \, dt\,.$$

Pour t dans $[\,0,\ \pi/2\,[$, posons

$$f_n(t) = \frac{1}{n}\,\sin^{2n+1} t\,.$$

La série de fonctions continues positives f_n converge vers la fonction f définie par

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\sin^{2n+1} t = \sin t\,\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\sin^{2n} t = -\sin t\,\ln(1-\sin^2 t) = -2\sin t\ln\cos t\,.$$

La fonction f est intégrable sur $[\,0,\ \pi/2\,[$, car, en effectuant le changement de variable

$$u = \cos t \quad \text{donc} \quad du = -\sin t\,dt\,,$$

on obtient

$$-2\int_0^{\pi/2} \sin t\ln\cos t\,dt = -2\int_0^1 \ln u\,du = \Big[-2(u\ln u - u)\Big]_0^1 = 2\,.$$

Il résulte alors du théorème de convergence dominée que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -2\int_0^{\pi/2} \sin t\ln\cos t\,dt = 2\,.$$

Etablir l'égalité

$$\int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(4n+1)(4n+3)}\,.$$

En déduire la somme de la série de terme général

$$a_n = (-1)^n\frac{2n+1}{(4n+1)(4n+3)}\,.$$

La fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$$

se développe en série entière de rayon 1 au voisinage de 0 sous la forme

$$f(x) = (1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n+2}\,.$$

La primitive nulle en 0 de cette fonction est donc aussi de rayon 1, et

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{4n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+3}}{4n+3}\,.$$

En $x = 1$, les séries de termes généraux $(-1)^n/(4n+1)$ et $(-1)^n/(4n+3)$ sont alternées et convergent donc. Il résulte du théorème d'Abel que

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n+3}\,.$$

Mais en additionnant les séries convergentes du membre de droite, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n+3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{8n+4}{(4n+1)(4n+3)}\,,$$

ce qui donne la relation voulue.

On peut calculer l'intégrale. On a tout d'abord

$$t^4+1 = (t^4+2t^2+1) - 2t^2 = (t^2+1)^2 - 2t^2 = (t^2+\sqrt{2}t+1)(t^2-\sqrt{2}t+1)\,,$$

ce qui permet de décomposer la fraction en éléments simples

$$\frac{1+t^2}{1+t^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right)\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,dt &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\,t+1) + \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\,t-1)\right]_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arctan(\sqrt{2}+1) + \arctan(\sqrt{2}-1)\right)\,.\end{aligned}$$

Mais

$$\sqrt{2}+1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\,,$$

et il résulte de la relation

$$\arctan u + \arctan\frac{1}{u} = \frac{\pi}{2}$$

que

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \pi\,\frac{\sqrt{2}}{4}\,,$$

et finalement que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pi\,\frac{\sqrt{2}}{16}\,.$$

Chapitre 5

CALCUL DE SUITES

Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $v_1 = 1$, et si $n \geq 2$,

$$v_n = \sum_{p+q=n} v_p v_q \,.$$

Déterminer v_n et préciser le rayon de convergence de la série entière de coefficient v_n.

Remarquons qu'il y une suite unique (de nombres entiers) vérifiant les conditions imposées.

Posons

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n x^n \,,$$

et supposons que le rayon de convergence R de cette série est non nul. Si $|x| < R$, on a

$$F(x)^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{p+q=n} v_p v_q \right) x^n = \sum_{n=2}^{\infty} v_n x^n \,,$$

Donc

$$F(x)^2 = F(x) - x \,.$$

Alors $F(x)$ est racine de l'équation

$$(1) \qquad F(x)^2 - F(x) + x = 0 \,.$$

Considérons la fonction G définie par

$$G(x) = \frac{1}{2}\,(1 - \sqrt{1-4x}) \,.$$

Elle est solution de l'équation (1) avec de plus $G(0) = 0$ et se développe grâce à la série du binôme en une série de rayon $1/4$. Si l'on écrit

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \,,$$

alors en écrivant que les coefficients de la série $G(x)^2 - G(x) + x$ sont tous nuls, on obtiendra que les coefficients a_n vérifient les mêmes relations que v_n. Par unicité on aura donc pour tout entier n l'égalité $a_n = v_n$ et donc $F = G$. En développant on a alors

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \left(1 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4x)^n\right)\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\,\frac{1\cdots(2n-3)}{2\cdots(2n)}(4x)^n\,.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par le produit

$$2\cdots(2n-2) = 2^{n-1}(n-1)!\,,$$

on obtient finalement

$$v_n = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels et α un nombre réel. On définit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_1 = 1$ et, si $n \geq 2$,

$$u_{n+1} = \alpha u_n + b_n\,.$$

Donner une formule explicite pour u_n.

Posons

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} x^n\,.$$

On a donc formellement

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n + b_n)x^n \\ &= \alpha\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \\ &= \alpha x + \alpha x\sum_{n=2}^{\infty} u_n x^{n-1} + g(x) \\ &= \alpha x + \alpha x f(x) + g(x)\,. \end{aligned}$$

On en tire

$$f(x) = \frac{g(x)+\alpha x}{1-\alpha x}\,,$$

que l'on développe

$$f(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n + \alpha x\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}x^{n+1}\,.$$

Alors, en posant $b_0 = 1$,

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k b_{n-k} + \alpha^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k b_{n-k}\,,$$

donc

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k b_{n-1-k}\,.$$

Ce calcul est purement formel car on n'a pas supposé que les séries avaient des rayons de convergence non nuls. On vérifie facilement par récurrence que le résultat obtenu est vrai. En effet, on a bien $u_1 = 1$, et

$$\begin{aligned} \alpha u_n + b_n &= \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k b_{n-1-k} + b_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{k+1} b_{n-1-k} + b_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha^k b_{n-k} + b_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha^k b_{n-k}\,. \end{aligned}$$

Soit la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par $a_0 = 1$, et pour $n \geq 1$,

$$a_n = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{a_p}{(n-1-p)!} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{a_{n-1-p}}{p!}\,.$$

1) Montrer que $0 < a_n \leq e^n$.
2) En déduire que la série entière de coefficient a_n est de rayon R non nul et trouver sa somme $f(x)$ pour $|x| < R$.
3) Montrer que si $s \geq 1$,

$$a_s = \sum_{n=1}^{s} \frac{n^{s-n}}{(s-n)!}$$

et que R est l'unique solution de l'équation

$$x = e^{-x}\,.$$

1) On montre la relation par récurrence. Pour $n = 0$, on a

$$0 < a_0 = 1 \leq e^0\,.$$

Supposons les inégalités vraies jusqu'à l'ordre $n-1$. Alors

$$0 < a_n \leq \sum_{p=0}^{n-1} \frac{e^{n-1-p}}{p!} = \left(\sum_{p=0}^{n-1} \frac{e^{-p}}{p!} \right) e^{n-1} .$$

Donc

$$0 < a_n \leq \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{e^{-p}}{p!} \right) e^{n-1} = e^{n-1}\, e^{1/e} = e^{n-1+1/e} ,$$

et puisque $1/e - 1$ est négatif, on en déduit

$$0 < a_n \leq e^n .$$

2) Le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n est donc supérieur à celui de la série géométrique de coefficient e^n qui vaut $1/e$. Il est donc non nul. On a alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{a_p}{(n-p)!} \right) x^{n+1} .$$

Le membre de gauche vaut

$$f(x) - a_0 = f(x) - 1 .$$

Celui de droite s'écrit, en faisant apparaître un produit de Cauchy,

$$x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{a_p}{(n-p)!} \right) x^n \right) = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) = x f(x) e^x .$$

On en tire, si $|x| < R$,

$$f(x) = \frac{1}{1 - xe^x} .$$

En utilisant, si $|xe^x| < 1$, le développement de la série géométrique, on trouve

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{nx} ,$$

puis, avec le développement de la série de l'exponentielle,

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{n^p x^{p+n}}{p!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=n}^{\infty} \frac{n^{s-n} x^s}{(s-n)!} .$$

La convergence de la somme double étant en fait absolue, on peut intervertir les sommations, ce qui donne

$$f(x) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{s} \frac{n^{s-n}}{(s-n)!} \right) x^s .$$

Finalement, si $s \geq 1$,

$$a_s = \sum_{n=1}^{s} \frac{n^{s-n}}{(s-n)!}\,.$$

Le calcul précédent étant valable si $|x|$ est inférieur à l'unique racine ρ de l'équation

$$xe^x = 1\,.$$

On a donc

$$R \geq \rho\,.$$

Mais lorsque x tend vers ρ,

$$f(x) = \frac{1}{1 - xe^x}$$

tend vers l'infini. Donc $R \leq \rho$ et finalement on a

$$R = \rho\,.$$

On pose $a_0 = 1$, puis, si $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} a_k\,.$$

On veut calculer les nombres a_n en utilisant la fonction génératrice f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\, x^n\,.$$

1) En utilisant le produit de Cauchy, montrer que, si f a un rayon de convergence non nul R, alors sur $]-R, R[$, on a

$$f' = f^2\,.$$

2) Résoudre l'équation différentielle précédente et en déduire a_n.
3) Vérifier que la suite ainsi obtenue convient bien.

1) En effectuant le produit de Cauchy de la série $f(x)$ par elle-même, on obtient, pour $|x| < R$,

$$f(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{(n-k)!} \frac{a_k}{k!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} a_k \right) \frac{x^n}{n!}\,.$$

Donc, en utilisant la relation de récurrence donnée dans l'énoncé, on obtient

$$f(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Mais on a aussi

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,,$$

et l'on en déduit donc que

$$f'(x) = f(x)^2\,,$$

avec de plus $f(0) = 1$.

2) Cette équation différentielle s'écrit

$$\frac{f'(x)}{f(x)^2} = 1$$

et s'intègre sous la forme

$$-\frac{1}{f(x)} = x - C$$

où C est une constante. On a donc

$$f(x) = \frac{1}{C - x}\,,$$

et la condition initiale donne $C = 1$. On obtient donc comme solution

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} n!\,\frac{x^n}{n!}\,,$$

ce qui donne

$$a_n = n!\,.$$

3) Il existe une suite unique vérifiant les conditions de l'énoncé. On vérifie alors par récurrence que la solution obtenue dans 2) convient. On a bien $a_0 = 0! = 1$, et si l'on suppose que pour tout k compris entre 0 et n, on a $a_k = k!$, alors

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k)!k! = \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)n! = (n+1)!\,,$$

ce qui donne la formule au rang $n+1$. Elle est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

On pose $a_0 = 1$, puis, si $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} a_k\,.$$

Calculer les a_n en utilisant la fonction génératrice f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\, x^n\,.$$

Remarquons tout d'abord qu'il existe au plus une suite vérifiant les conditions de l'énoncé.

Supposons que la série f a un rayon de convergence R non nul. Alors lorsque $|x| < R$, on a, en utilisant le produit de Cauchy

$$f(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{a_{n-k}}{(n-k)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!}.$$

En utilisant la relation de récurrence, on obtient donc

$$f(x)^2 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \frac{x^n}{n!}.$$

D'autre part, on obtient en dérivant

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \frac{x^n}{n!},$$

et la fonction f vérifie sur $]-R,\, R[$ l'équation différentielle

$$f'(x) = \frac{f(x)^2}{2},$$

avec la condition initiale $f(0) = a_0 = 1$.

Cette équation différentielle s'écrit

$$\frac{f'(x)}{f(x)^2} = \frac{1}{2}$$

et s'intègre sous la forme

$$-\frac{1}{f(x)} = \frac{x}{2} - C$$

où C est une constante. On a donc

$$f(x) = \frac{1}{C - x/2},$$

et la condition initiale donne $C = 1$. On obtient donc comme solution

$$f(x) = \frac{1}{1 - x/2},$$

Elle se développe en série entière, ce qui donne

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n},$$

et donc par identification
$$a_n = \frac{n!}{2^n}\,.$$
Assurons-nous que la suite obtenue convient. On a bien $a_0 = 1$. D'autre part
$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k a_{n-k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k!}{2^k}\,\frac{(n-k)!}{2^{n-k}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{2^n} = (n+1)\,\frac{n!}{2^{n+1}}\,,$$
ce qui donne donc
$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k a_{n-k} = \frac{(n+1)!}{2^{(n+1)}} = a_{n+1}\,.$$
La suite ainsi obtenue répond donc bien à la question.

Si $n \geq 1$, soit I_n le nombre d'involutions de $\{1,\dots,n\}$. On pose $I_0 = 1$.
1) Montrer que si $n \geq 2$, on a
$$I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}\,.$$
2) Montrer que la série entière de terme général $\dfrac{I_n}{n!}\,x^n$ converge si x appartient à $]-1,\,1[$. Soit $S(x)$ sa somme.
3) Montrer que, pour tout x de $]-1,\,1[$, on a
$$S'(x) = (1+x)S(x)\,.$$
4) En déduire une expression de $S(x)$, puis une expression de I_n.

Rappelons qu'une involution φ d'un ensemble E est une application de E dans E telle que
$$\varphi\circ\varphi = \mathrm{Id}_E\,.$$
Le nombre I_n est également le nombre d'involutions d'un ensemble fini à n éléments.

1) Pour $n \geq 3$, soit φ une involution de $\{1,\dots,n\}$. Il y a deux possibilités.

• Ou bien $\varphi(n) = n$. Dans ce cas la restriction de φ à $\{1,\dots,n-1\}$ est une involution de $\{1,\dots,n-1\}$. Il y a donc I_{n-1} involutions de ce type.

• Ou bien $\varphi(n) = p$ appartient à $\{1,\dots,n-1\}$. Alors $\varphi(p) = n$, et la restriction de φ à l'ensemble $\{1,\dots,n-1\}\setminus\{p\}$ est une involution de cet ensemble fini à $n-2$ éléments. Donc pour chacune des $n-1$ valeurs de p, il y a I_{n-2} involutions. Cela fait $(n-1)I_{n-2}$ involutions de ce type. Finalement
$$I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}\,.$$

Cette relation est encore vraie si $n = 2$, car $I_2 = 2$, (les deux bijections de $\{1,2\}$ sur lui-même sont des involutions), $I_1 = I_0 = 1$.

2) Comme toute involutions de $\{1,\dots,n\}$ est bijective, c'est une permutation de $\{1,\dots,n\}$. Le nombre d'involutions est donc inférieur au nombre de permutations et l'on a

$$I_n \leq n!\,.$$

Alors

$$0 \leq \frac{I_n}{n!} \leq 1\,,$$

et la série entière de terme général $I_n x^n/n!$ a un rayon de convergence R supérieur à celui de la série géométrique, donc $R \geq 1$.

3) Calculons $S'(x)$. On a, pour tout x de $]-1,\,1[$,

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{(n-1)!}\, x^{n-1} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}}{(n-1)!}\, x^{n-1} \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!}\, x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{I_{n-2}}{(n-2)!}\, x^{n-1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{n!}\, x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n}{n!}\, x^n\,. \end{aligned}$$

On trouve donc

$$S'(x) = S(x) + xS(x) = (1+x)S(x)\,,$$

avec de plus $S(0) = 1$, et cette équation différentielle linéaire du premier ordre a comme solution unique la fonction S qui à x associe $e^{x+x^2/2}$.

4) On a donc

$$S(x) = e^{x+x^2/2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}\right)\,.$$

On obtient un produit de Cauchy de séries entières de rayon de convergence infini, donc $S(x)$ est en fait de rayon infini.

Posons

$$a_{2p} = \frac{1}{2^p p!} \quad , \quad a_{2p+1} = 0 \quad , \quad b_p = \frac{1}{p!}\,.$$

Le coefficient c_n de x^n dans la série produit est donc

$$c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p} = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/2)} a_{2p} b_{n-2p} = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \frac{1}{2^p p!(n-2p)!}\,,$$

et par identification des coefficients, ce nombre vaut $I_n/n!$, donc, on obtient,

$$I_n = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \frac{n!}{2^p p!(n-2p)!}\,.$$

On définit la suite réelle (a_n), par $a_0 = a_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}\,.$$

1) Trouver le rayon de convergence R de la série entière de terme général $a_n x^n$. On pourra commencer par montrer que la suite $(a_n/n^2)_{n\geq 1}$ est décroissante.
2) Pour x dans $]-R,\, R[$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

Déterminer une équation différentielle dont f est solution puis calculer $f(x)$.
3) En déduire une expression de a_n sous forme de somme.

1) Par récurrence, on démontre facilement que la suite (a_n) est positive. Alors $a_{n+1} \geq a_n$ et la suite est également croissante. Elle ne peut donc pas converger vers 0, ce qui montre que la série de terme général a_n diverge grossièrement et donc que $R \leq 1$.

Comme $a_{n-1} \leq a_n$, on a

$$a_{n+1} \leq a_n + \frac{2}{n+1} a_n = \frac{n+3}{n+1}\, a_n\,.$$

Alors, si $n \geq 1$,

$$\frac{a_n}{n^2} - \frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} \geq a_n \left(\frac{1}{n^2} - \frac{n+3}{(n+1)^3}\right) = a_n\, \frac{3n+1}{n^2(n+1)^3} \geq 0\,.$$

La suite $(a_n/n^2)_{n\geq 1}$ est donc décroissante. Il en résulte que

$$0 \leq \frac{a_n}{n^2} \leq a_1 = 1\,,$$

et donc que

$$0 \leq a_n \leq n^2\,.$$

Comme la série entière de terme général $n^2 x^n$ est de rayon 1, on en déduit que $R \geq 1$. Finalement on a $R = 1$.

2) Si x appartient à $]-1,1[$ et si $n \geq 1$, on a

$$(a_{n+1}-a_n)x^{n+1} = \frac{2}{n+1}a_{n-1}\,x^{n+1}\,.$$

Puisque toutes les séries sont de rayon 1, on peut sommer et on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)x^{n+1} = 2\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,,$$

et, puisque $a_1 = a_0 = 1$, on obtient encore

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)x^{n+1} = 2\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,.$$

Le membre de gauche vaut

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1} - x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = (f(x)-1)-xf(x)\,.$$

Donc

$$2\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}\frac{x^{n+1}}{n+1} = (1-x)f(x)-1\,.$$

Alors, en dérivant la relation précédente, on obtient

$$2xf(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n = (1-x)f'(x)-f(x)\,,$$

et f est solution de l'équation différentielle homogène

$$(1-x)f'-(2x+1)f = 0\,,$$

que l'on résout par le procédé heuristique suivant :

on écrit

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x+1}{1-x} = -2+\frac{3}{1-x}\,,$$

et on en déduit

$$\ln|f(x)| = -2x-3\ln(1-x)+A\,,$$

où A est une constante, d'où la solution général

$$f(x) = K\,\frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}\,,$$

où K est une constante.

La fonction f vérifie la condition initiale $f(0) = 1$. On obtient alors $K = 1$ et

$$f(x) = \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}\,.$$

3) On peut retrouver les coefficients de f en utilisant le produit de Cauchy. Tout d'abord, si

$$g(x) = (1-x)^{-1}\,,$$

on a

$$g''(x) = 2(1-x)^{-3}\,,$$

donc

$$(1-x)^{-3} = \frac{g''(x)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n\,.$$

On a aussi

$$e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}\,x^n\,.$$

Alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)(k+2)}{2}\,\frac{(-2)^{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n\,,$$

ce qui donne

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{(k+1)(k+2)}{(n-k)!}2^{n-k-1}\,.$$

Chapitre 6

EXERCICES THÉORIQUES

Théorèmes de comparaison.

1) Soit trois suites de nombres complexes (a_n), (b_n) et (c_n) telles que, à partir d'un certain rang

$$|a_n| \leq |b_n| \leq |c_n| .$$

Quelle relation y a-t-il entre les rayons de convergence respectifs R, R', R'' des séries entières de coefficients a_n, b_n et c_n ? Qu'en déduit-on lorsque $R = R''$?

2) Soit deux suites de nombres complexes (a_n) et (b_n) telles que

$$|a_n| \sim |b_n| .$$

Quelle relation y a-t-il entre les rayons de convergence respectifs R, R' des séries entières de coefficients a_n et b_n ?
Lorsque $|z| = R$, les séries de termes généraux $a_n z^n$ et $b_n z^n$ sont-elles de même nature ?

1) Si z est un nombre complexe, on a, à partir d'un certain rang,

$$|a_n||z|^n \leq |b_n||z|^n \leq |c_n||z|^n .$$

Si $|z| < R''$ la série de terme général $c_n z^n$ converge absolument, donc la série de terme général $b_n z^n$ également. Il en résulte que

$$R' \geq R'' .$$

Par le même raisonnement

$$R \geq R' .$$

Donc

$$R \geq R' \geq R'' .$$

En particulier, si $R = R''$, alors $R = R' = R''$.

2) Si les suites $(|a_n|)$ et $(|b_n|)$ sont équivalentes, on a, à partir d'un certain rang,

$$\frac{|a_n|}{2} \leq |b_n| \leq \frac{3|a_n|}{2},$$

et il résulte de 1) que $R = R'$.

En prenant

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

les suites $(|a_n|)$ et $(|b_n|)$ sont équivalentes et les deux séries entières sont de rayon 1, mais la série de terme général b_n converge d'après le critère de Leibniz, alors que la série de terme général a_n diverge comme somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Rayon de convergence des séries paires et impaires

1) Quelle relation existe-t-il entre le rayon de convergence R de la série entière de terme général $a_n z^n$ et celui de la série entière de terme général $a_n z^{2n}$?

2) Soit R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs des séries de termes généraux $a_{2n}z^n$ et $a_{2n+1}z^n$. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière de terme général $a_n z^n$ vaut $\min(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2})$, et que, si $|z| < R$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}.$$

1) La série de terme général $a_n z^n$ converge si $|z| < R$ et diverge si $|z| > R$. Donc la série de terme général $a_n(z^2)^n$ converge si $|z|^2 < R$, c'est-à-dire si $|z| < \sqrt{R}$ et diverge si $|z|^2 > R$, c'est-à-dire si $|z| > \sqrt{R}$. Le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n z^{2n}$ est donc $\sqrt{R}$.

2) D'après 1), la série de terme général $a_{2n}z^{2n}$ est de rayon de convergence $\sqrt{R_1}$, et celle de terme général $a_{2n+1}z^{2n}$ est de rayon de convergence $\sqrt{R_2}$, donc la série de terme général $a_{2n+1}z^{2n+1}$ est aussi de rayon $\sqrt{R_2}$.

Alors lorsque $R_1 \neq R_2$, la série de terme général $a_n z^n$ qui est la somme des séries de termes généraux $a_{2n}z^{2n}$ et $a_{2n+1}z^{2n+1}$ est de rayon $\min(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2})$.

Lorsque $R_1 = R_2$, on sait déjà que $R \geq \sqrt{R_1}$.

Soit alors z tel que $|z| > \sqrt{R_1}$, donc $|z|^2 > R_1$, la suite $(a_{2n}z^{2n})$ ne converge pas vers 0. Alors la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas non plus vers 0, et il en résulte que $R \leq \sqrt{R_1}$. On a donc encore égalité dans ce cas. Dans tous les cas, pour tout $|z| < R$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}.$$

1) **Critère d'Abel.** Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite monotone qui converge vers 0. Soit $(w_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels ou complexes, telle que les sommes partielles $w_n + w_{n+1} + \cdots + w_m$ soient majorées par un nombre M indépendant de n et de m. Montrer que la série de terme général

$$u_n = v_n w_n$$

converge et que

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} v_k w_k\right| \leq M|v_n| \,.$$

2) **Théorème d'Abel.** Soit une série entière de coefficient a_n, de rayon non nul R et de somme S. On suppose que la série converge en un point x_0 (de $\mathbb{C}$) tel que $|x_0| = R$. Montrer que S admet une limite radiale en x_0, c'est-à-dire que

$$\lim_{r\to 1_-} S(rx_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \,.$$

3) Soit une série entière de coefficient a_n et de rayon non nul. On suppose que la série converge en un point $x_0 > 0$. Montrer que la série converge uniformément sur $[\,0,\, x_0\,]$.

1) On peut supposer que (v_n) est décroissante positive, sinon on prend $-v_n$. La démonstration repose sur la formule de sommation d'Abel

$$\sum_{p=n}^{m} v_p w_p = v_m\left(\sum_{k=n}^{m} w_p\right) + (v_{m-1} - v_m)\left(\sum_{k=n}^{m-1} w_p\right) + \cdots + (v_n - v_{n+1})\left(\sum_{k=n}^{n} w_p\right) \,.$$

Donc

$$\left|\sum_{p=n}^{m} v_p w_p\right| \leq |v_m|\left|\sum_{k=n}^{m} w_p\right| + |v_{m-1} - v_m|\left|\sum_{k=n}^{m-1} w_p\right| + \cdots + |v_n - v_{n+1}|\left|\sum_{k=n}^{n} w_p\right| \,,$$

et, en majorant chaque somme par M,

$$\left|\sum_{p=n}^{m} v_p w_p\right| \leq M(|v_m| + |v_{m-1} - v_m| + \cdots + |v_n - v_{n+1}|) \,.$$

Mais si la suite (v_n) est décroissante positive,

$$|v_m| + |v_{m-1} - v_m| + \cdots + |v_n - v_{n+1}| = v_m + (v_{m-1} - v_m) + \cdots + (v_n - v_{n+1}) = v_n = |v_n| \,,$$

Il en résulte que

$$(\star) \qquad \left|\sum_{p=n}^{m} v_p w_p\right| \leq M|v_n| \,.$$

Remarque : l'inégalité $(\star)$ est vraie sans supposer que la suite (v_n) converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite (v_n) converge vers 0, il existe N tel que $n \geq N$ implique $|v_n| < \varepsilon/M$. Donc, si $m > n \geq N$, on a
$$\left| \sum_{p=n}^{m} v_p w_p \right| \leq \varepsilon\,,$$
ce qui, d'après le critère de Cauchy, montre que la série de terme général u_n converge. De plus, en faisant tendre m vers l'infini
$$\left| \sum_{p=n}^{\infty} v_p w_p \right| \leq M|v_n|\,.$$
Donc, pour le reste R_n de la série,
$$|R_n| \leq M|v_{n+1}|\,.$$
2) On considère la série entière de la variable r de terme général $a_n r^n x_0^n$, et l'on va montrer que cette série converge uniformément sur $[\,0,\,1\,]$. On pose, pour r dans $[\,0,\,1\,]$,
$$w_n = a_n x_0^n \quad \text{et} \quad v_n(r) = r^n\,.$$
La suite (v_n) est une suite décroissante positive de fonctions. Comme la série de terme général w_n converge, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N, tel que $m > n > N$ implique
$$\left| \sum_{k=n}^{m} w_k \right| < \varepsilon\,.$$
Alors de l'inégalité $(\star)$ on déduit
$$\left| \sum_{k=n}^{m} w_k v_k \right| < \varepsilon v_n(r) \leq \varepsilon\,.$$
Il résulte du critère de Cauchy de convergence uniforme, que la série de terme général $v_n w_n$ converge uniformément sur $[\,0,\,1\,]$. Sa somme est donc continue sur cet intervalle. Mais
$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(r) w_n = \begin{cases} S(rx_0) & \text{si } r \in [\,0,\,1\,[\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n & \text{si } r = 1 \end{cases}$$
La continuité en 1 donne alors
$$\lim_{r \to 1_-} S(rx_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n\,.$$
3) Si $x_0 < R$, le résultat est une conséquence des propriétés des séries entières : il y a convergence uniforme sur tout disque de rayon $|x_0| < R$.
Si $x_0 = R$, le résultat est une conséquence de la démonstration effectuée dans 2) : la série de terme général $v_n w_n$ converge uniformément sur $[\,0,\,1\,]$, donc la série de terme général $a_n x^n$ converge uniformément sur $[\,0,\,x_0\,]$.

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que la série de terme général $\dfrac{a_n}{n}$ converge.
Si t est un nombre réel strictement positif, on pose

$$f_n(t) = a_n e^{-tn}\,.$$

1) Montrer que pour tout nombre réel $t > 0$, la série de fonctions de terme général f_n converge et que sa somme est continue sur $]\,0,\,+\infty\,[$.
2) On pose

$$r_N(t) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n e^{-tn}\,.$$

Montrer que pour tout nombre réel $t > 0$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} t^x r_N(t)\,dt = 0\,.$$

1) Posons

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}\,.$$

La primitive de f qui s'annule en 0 est

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} x^n\,,$$

et les deux séries ont même rayon de convergence R. Comme la série $F(1)$ converge par hypothèse, d'une part on a $R \geq 1$, d'autre part la fonction f est continue sur $[\,0,\,1\,]$ et la série converge uniformément sur $[\,0,\,1\,]$.

Alors, si pour $t > 0$ l'on pose,

$$g(t) = e^{-t} f(e^{-t}) \quad \text{et} \quad f_n(t) = a_n e^{-nt}\,,$$

les fonctions g et f_n sont continues sur $]\,0,\,+\infty\,[$, et l'on a

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nt} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,.$$

La somme de la série de fonctions continues de terme général f_n est donc continue sur $]\,0,\,+\infty\,[$.

2) Soit $N \geq 1$. Pour x dans $[\,0,\,1\,]$, posons

$$R_N(x) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n}\,.$$

La suite (R_N) des restes de la série de terme général $a_n x^n/n$ converge uniformément vers 0 sur l'intervalle $[0,\,1]$.

Pour t dans $[0,\,+\infty[$, posons

$$r_N(t) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \frac{e^{-nt}}{n} = R_N(e^{-t})\,.$$

La suite (r_N) converge uniformément vers 0 sur $[0,\,+\infty[$.

D'autre part, on a

$$R_N'(x) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n x^{n-1}$$

donc

$$R_N'(e^{-t}) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n e^{-nt+t} = e^t r_N(t)\,.$$

Il en résulte que la dérivée de la fonction qui à t associe $R_N(e^{-t})$ est $-r_N$.

En intégrant par parties, on obtient alors

$$\int_0^1 t^x r_N(t)\,dt = \Big[-t^x R_N(e^{-t})\Big]_0^1 + \int_0^1 x t^{x-1} R_N(e^{-t})\,dt\,.$$

Mais

$$\Big[-t^x R_N(e^{-t})\Big]_0^1 = -R_N(e^{-1}) \leq \sup_{t\in[0,1]} |R_N(e^{-t})|\,,$$

et

$$\left|\int_0^1 x t^{x-1} R_N(e^{-t})\,dt\right| \leq \sup_{t\in[0,1]} |R_N(e^{-t})| \int_0^1 x t^{x-1}\,dx = \sup_{t\in[0,1]} |R_N(e^{-t})|\,.$$

Finalement

$$\left|\int_0^1 t^x r_N(t)\,dt\right| \leq 2 \sup_{t\in[0,1]} |R_N(e^{-t})|\,.$$

La convergence uniforme de R_N vers 0 sur $[0,\,1]$ donne le résultat voulu.

Soit F une fraction rationnelle telle que pour tout entier naturel n, le nombre $F(n)$ existe et soit non nul.

1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de coefficient $F(n)$.

2) Comparer les rayons de convergence des séries entières de coefficients u_n et $u_nF(n)$ où (u_n) est une suite de nombres complexes.

1) Si le rapport des termes de plus haut degré de la fraction rationnelle $F(x)$ est αx^p, avec $\alpha \neq 0$ et p dans $\mathbb{Z}$, on a alors

$$F(n) \sim \alpha n^p\,,$$

et donc

$$\frac{|F(n)|}{|F(n+1)|} \sim \frac{n^p}{(n+1)^p}\,.$$

Cette suite converge vers $R = 1$.

2) Lorsque p est positif, on a

$$u_n F(n) \sim \alpha u_n n^p \sim \alpha u_n n(n-1)\cdots(n-p+1)\,.$$

La série entière de terme général $u_n n(n-1)\cdots(n-p+1)x^{n-p}$ est la dérivée $p-$ième de celle de terme général $u_n x^n$ et a même rayon qu'elle. Les séries entières de termes généraux $u_n x^n$ et $u_n F(n)x^n$ ont donc le même rayon de convergence. C'est aussi celui de la série entière de terme général $u_n n^p x^n$.

Lorsque p est strictement négatif, il résulte de ce qui précède que les séries entières de termes généraux $u_n F(n) n^{-p} x^n$ et $u_n F(n)x^n$ ont même rayon de convergence, et comme

$$u_n F(n) n^{-p} \sim \alpha u_n\,,$$

les séries entières de termes généraux $u_n F(n) n^{-p} x^n$ et $u_n x^n$ ont même rayon de convergence. On en déduit de nouveau que les séries de termes généraux $u_n x^n$ et $u_n F(n)x^n$ ont le même rayon de convergence.

1) Que peut-on dire du rayon de convergence R de la série de terme général a_n lorsque la suite $(|a_n|)$ admet une limite ℓ dans $[0, +\infty]$?
2) Que peut-on dire de la suite (a_n), si $R > 1$, $R < 1$, $R = 1$?

1) Lorsque ℓ est finie et non nulle, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1 = R\,.$$

Lorsque $\ell = 0$, (plus généralement si $(|a_n|)$ est majorée par une constante K),

$$|a_n z^n| \leq K|z^n|\,,$$

donc la série converge si $|z| < 1$. On a alors

$$R \geq 1\,.$$

En prenant successivement

$$a_n = \frac{1}{n} \quad , \quad a_n = \frac{1}{\alpha^n}\ (\alpha > 1) \quad , \quad a_n = \frac{1}{n!}$$

on obtient respectivement

$$R = 1 \quad , \quad R = \alpha \quad , \quad R = +\infty \,,$$

et donc toutes les valeurs de $[\,1,\, +\infty\,]$ peuvent être obtenues.

Lorsque $\ell = +\infty$, à partir d'un certain rang la suite $(|a_n|)$ est minorée par une constante K non nulle et

$$|a_n z^n| \geq K|z^n|\,,$$

donc la série diverge si $|z| > 1$. On a donc

$$R \leq 1\,.$$

En prenant successivement

$$a_n = n \quad , \quad a_n = \frac{1}{\alpha^n}\ (0 < \alpha < 1) \quad , \quad a_n = n!$$

on obtient respectivement

$$R = 1 \quad , \quad R = \alpha \quad , \quad R = 0\,,$$

et donc toutes les valeurs de $[\,0,\, 1\,]$ peuvent être obtenues.

2) Si $R > 1$, la série entière de terme général $a_n z^n$ converge si $z = 1$, et la suite (a_n) converge vers $\ell = 0$.

Si $R < 1$, la série entière de terme général $a_n z^n$ diverge si $z = 1$, et la suite (a_n) n'est pas bornée. Elle ne tend pas nécessairement vers l'infini, comme le montre l'exemple de la suite

$$a_n = (1 + (-1)^n)n!\,,$$

qui n'a pas de limite, alors que la série associée est de rayon nul.

Si $R = 1$, on ne peut rien dire de la suite (a_n). Même si $(|a_n|)$ admet une limite, celle-ci peut être n'importe quel élément de $[\,0,\, +\infty\,]$ comme le montre les exemples suivants :

$$a_n = n \quad , \quad a_n = \ell \in \mathbb{R}^* \quad , \quad a_n = \frac{1}{n}\,,$$

donnent des séries de rayon 1 telles que (a_n) converge vers $+\infty$, ℓ ou 0.

Soit deux séries entières de coefficients respectifs a_n et b_n et de rayons respectifs non nuls r et r'.
1) Soit R le rayon de la série entière de coefficients $a_n b_n$. Montrer que

$$R \geq rr' .$$

Donner un exemple où l'inégalité est stricte.
2) Soit p un entier naturel, trouver le rayon de convergence R_p de la série de coefficients a_n^p.
3) On suppose que a_n n'est jamais nul. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière de coefficients $1/a_n$?
Donner un exemple où l'inégalité obtenue est stricte.

1) Soit x tel que $|x| < rr'$, donc

$$\frac{|x|}{r} < r' ,$$

et il existe v tel que

$$\frac{|x|}{r} < v < r' .$$

Si l'on pose

$$u = \frac{x}{v} ,$$

on a

$$|u| = \frac{|x|}{v} < r .$$

On a donc trouvé u et v tels que $x = uv$ et

$$|u| < r \quad \text{et} \quad |v| < r' .$$

La suite $(|b_n v^n|)$ est alors majorée par une constante K. Donc

$$|a_n b_n x^n| = |a_n u^n| \, |b_n v^n| \leq K \, |a_n u^n| ,$$

et la série de terme général $a_n u^n$ converge absolument. Alors la série de terme général $a_n b_n x^n$ converge absolument, et donc

$$R \geq rr' .$$

En prenant

$$a_n = \frac{1}{2} (1 + (-1)^n) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{2} (1 - (-1)^n)$$

on obtient deux séries de rayon 1. Comme le produit $a_n b_n$ est toujours nul, la série de terme général $a_n b_n x^n$ est la série nulle de rayon infini.

2) Il résulte de 1) par récurrence que

$$R_p \geq r^p .$$

On a égalité si $p = 0$ et $p = 1$.

Etudions le cas où $p \geq 2$.

Soit x tel que $|x| > r^p$, et u une racine $p-$ième de x. Alors $|u| > r$ et la série de terme général $a_n u^n$ diverge. Il en résulte que la suite $(a_n u^n)$ ne converge pas vers 0. Comme

$$(a_n u^n)^p = a_n^p x^n \,,$$

on en déduit aussi que la suite $(a_n^p x^n)$ ne converge pas vers 0. Donc que

$$R_p \leq r^p \,.$$

Finalement, on a bien l'égalité

$$R_p = r^p \,.$$

3) En prenant $b_n = 1/a_n$ dans 1), on obtient $a_n b_n = 1$, et donc $R = 1$. L'inégalité

$$rr' \leq 1$$

donne alors

$$r' \leq \frac{1}{r} \,.$$

Cette inégalité peut être stricte. En prenant

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \,,$$

on obtient une série de rayon 1, alors que

$$\frac{1}{a_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \,,$$

donne une série de rayon 1/2.

Soit la série entière de terme général $a_n z^n$ et de rayon R, et soit une suite $(n_k)_{k \geq 0}$ strictement croissante d'entiers naturels. Que peut-on dire du rayon de convergence R' de la série entière de terme général $a_{n_k} z^{n_k}$?
Donner un exemple où l'inégalité obtenue est stricte.

Si $|z| > R'$, la série entière diverge donc la suite $(a_{n_k} z^{n_k})$ n'est pas bornée. Mais cette suite est une suite extraite de $(a_n z^n)$ qui n'est donc pas bornée non plus. La série de terme général $a_n z^n$ diverge donc. Il en résulte que

$$R' \geq R \,.$$

Prenons la suite définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2p + 1 \\ \dfrac{1}{n!} & \text{si } n = 2p \end{cases} \,.$$

On a $R = 1$, et en prenant $n_k = 2k$, on a $R' = +\infty$.

> 1) Soit la série entière de terme général $a_n z^n$ et de rayon R, et soit une suite $(n_k)_{k\geq 0}$ strictement croissante d'entiers naturels. Soit R' le rayon de la série entière de terme général $a_{n_k} z^k$?
> Montrer que si $R' \geq 1$, alors $R' \geq R$, et donner un exemple où l'inégalité est stricte.
> 2) Donner un exemple où $R = 1$, $R' = 0$ et où l'on peut extraire de la suite a_{n_k} une nouvelle suite a_{m_k} telle que la série de terme général $a_{m_k} z^k$ soit de rayon 1.

1) Comme la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels, on a, pour tout entier k,

$$n_k \geq k\,.$$

(Cela se démontre facilement par récurrence).

Si $R' \geq 1$ et $|z| > R'$, alors $|z| > 1$, et

$$|a_{n_k} z^k| = |a_{n_k} z^{n_k}|\,|z^{k-n_k}| = \frac{|a_{n_k} z^{n_k}|}{|z|^{n_k - k}} \leq |a_{n_k} z^{n_k}|\,.$$

La suite $(a_{n_k} z^k)$ n'est pas bornée, donc la suite $(a_{n_k} z^{n_k})$ non plus. Mais cette suite est une suite extraite de $(a_n z^n)$ qui n'est donc pas bornée. La série de terme général $a_n z^n$ diverge donc. Il en résulte que

$$R' \geq R\,.$$

Prenons la suite définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2p+1 \\ \dfrac{1}{n!} & \text{si } n = 2p \end{cases}\,.$$

On a $R = 1$, et en prenant $n_k = 2k$, on a $R' = +\infty$.

2) Soit la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}\,.$$

Les parties paires et impaires de la série sont de rayon 1, donc $R = 1$.

Soit la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ définie par

$$n_k = \begin{cases} (p+2)! & \text{si } k = 2p \\ (p+2)! + 1 & \text{si } k = 2p+1 \end{cases}\,.$$

cette suite est strictement croissante car

$$(p+2)! < (p+2)! + 1 < (p+3)!\,.$$

Comme n_{2p} est pair et n_{2p+1} est impair, on a

$$a_{n_k} = \begin{cases} (p+2)! & \text{si } k = 2p \\ 1 & \text{si } k = 2p+1 \end{cases} .$$

La partie paire de la série de terme général $a_{n_k} z^k$ est de rayon nul, donc la série également.

Il suffit de prendre la partie impaire de la série précédente pour retrouver une série de rayon 1 puisque

$$a_{n_{2p+1}} = 1 .$$

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres positifs non tous nuls. On pose

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} a_p .$$

Montrer la relation

$$\sum_{p=0}^{n} a_p z^p = S_n z^n + (1-z) \sum_{p=0}^{n-1} S_p z^p . \qquad (1)$$

En déduire la valeur du rayon de convergence R de la série entière de coefficient S_n en fonction du rayon de convergence r de la série de coefficient a_n, et trouver la somme de la série.

Dans ce qui suit on n'utilise pas le produit de Cauchy.

On a

$$\begin{aligned}
(1-z)\sum_{p=0}^{n-1} S_p z^p &= \sum_{p=0}^{n-1} S_p z^p - \sum_{p=0}^{n-1} S_p z^{p+1} \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} S_p z^p - \sum_{p=1}^{n} S_{p-1} z^p \\
&= \sum_{p=1}^{n-1} S_p z^p - \sum_{p=1}^{n-1} S_{p-1} z^p + S_0 - S_{n-1} z^n \\
&= \sum_{p=1}^{n-1} (S_p - S_{p-1}) z^p + a_0 - S_n z^n + a_n z^n \\
&= \sum_{p=0}^{n} a_p z^p - S_n z^n .
\end{aligned}$$

Si la série de terme général $S_n z^n$ converge, alors la suite $(S_n z^n)$ converge vers 0 et d'après (1) la série de terme général $a_n z^n$ converge. Il en résulte que $r \geq R$ et que, si $|z| < R$,

(2) $$\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p = (1-z) \sum_{p=0}^{\infty} S_p z^p \, .$$

Si $r > 1$, la série de terme général a_n converge et sa somme est non nulle. Donc la suite (S_n) a une limite finie $S > 0$. La série entière de coefficient S_n a donc même rayon de convergence que la série géométrique de terme général z^n. On trouve donc $R = 1$.

Si $r \leq 1$, comme S_n est positif, on a, d'après (1), lorsque $0 < z < r$,

$$\sum_{p=0}^{n-1} S_p z^p \leq \frac{1}{1-z} \sum_{p=0}^{n} a_p z^p \leq \frac{1}{1-z} \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p \, .$$

Alors la suite $\left(\sum_{p=0}^{n} S_p z^p \right)$ est croissante et majorée donc converge. On a donc $R \geq r$, et finalement $R = r$.

En résumé

$$R = \inf(r, 1) \, .$$

Soit trois nombres R_1, R_2 et R de $]\,0, +\infty\,]$ tels que

$$R_1 \leq R_2 \quad \text{et} \quad R_1 \leq R \, .$$

Trouver deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2 dont le produit de Cauchy soit une série entière de rayon R.

Cas 1) $R_1 < R_2 < +\infty$ et $R_1 \leq R < +\infty$.

$$S_1(x) = \frac{1 + \dfrac{x}{R_2}}{1 + \dfrac{x}{R_1}} \frac{1}{1 + \dfrac{x}{R}} \quad \text{et} \quad S_2(x) = \frac{1 + \dfrac{x}{R_1}}{1 + \dfrac{x}{R_2}}$$

sont de rayons respectifs R_1 et R_2. Le produit de Cauchy de ces séries

$$S_1(x) S_2(x) = \frac{1}{1 + \dfrac{x}{R}}$$

est de rayon R.

Cas 2) $R_1 = R_2 \leq R < +\infty$.

$$S_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{x}{R_1}}}\,\frac{1}{1+\dfrac{x}{R}} \quad \text{et} \quad S_2(x) = \sqrt{1+\frac{x}{R_1}}$$

sont de rayon R_1. Le produit de Cauchy de ces séries

$$S_1(x)S_2(x) = \frac{1}{1+\dfrac{x}{R}}$$

est de rayon R.

Cas 3) $R_1 = R_2 < R = +\infty$.

$$S_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{x}{R_1}}} \quad \text{et} \quad S_2(x) = \sqrt{1+\frac{x}{R_1}}$$

sont de rayon R_1. Le produit de Cauchy de ces séries

$$S_1(x)S_2(x) = 1$$

est de rayon $+\infty$.

Cas 4) $R_1 < R_2 = R = +\infty$.

$$S_1(x) = \frac{1}{1+\dfrac{x}{R_1}} \quad \text{et} \quad S_2(x) = 1+\frac{x}{R_1}$$

sont de rayon R_1 et $R_2 = +\infty$. Le produit de Cauchy de ces séries

$$S_1(x)S_2(x) = 1$$

est de rayon $+\infty$.

Cas 5) $R_1 = R_2 = R = +\infty$.
Résultat évident en prenant pour S_1 et S_2 deux polynômes.

Cas 6) $R_1 < R_2 < R = +\infty$.

$$S_1(x) = \frac{1+\dfrac{x}{R_2}}{1+\dfrac{x}{R_1}} \quad \text{et} \quad S_2(x) = \frac{1+\dfrac{x}{R_1}}{1+\dfrac{x}{R_2}}$$

sont de rayons respectifs R_1 et R_2. Le produit de Cauchy de ces séries

$$S_1(x)S_2(x) = 1$$

est de rayon $+\infty$.

Cas 7) $R_1 = R < R_2 = +\infty$.

$$S_1(x) = \frac{1}{1 + \dfrac{x}{R_1}} \quad \text{et} \quad S_2(x) = 1\,,$$

sont de rayons respectifs R_1 et $+\infty$. Le produit de Cauchy est $S_1(x)$, de rayon R_1.

Cas 8) $R_1 < R < R_2 = +\infty$.

$$S_1(x) = \frac{1}{1 + \dfrac{x}{R_1}} \frac{1}{1 + \dfrac{x}{R}} \quad \text{et} \quad S_2(x) = 1 + \frac{x}{R_1}$$

sont de rayons respectifs R_1 et $+\infty$. Le produit de Cauchy de ces séries

$$S_1(x)S_2(x) = \frac{1}{1 + \dfrac{x}{R}}$$

est de rayon R.

Formule d'Hadamard.
Soit (a_n) une suite de nombres complexes. On pose

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sup\limits_{p\geq n} \sqrt[p]{|a_p|} \right)}\,.$$

1) Montrer que si $|z| < R$, la série de terme général $a_n z^n$ converge absolument.
2) Montrer que si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.
3) En déduire que R est le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n.
4) Si a_n n'est jamais nul, que peut-on dire du rayon de convergence R' de la série entière de coefficients $1/a_n$?
Donner un exemple où $0 < R' < 1/R$, et un exemple où $R = R' = 0$.

Remarquons que la suite $\left(\sup\limits_{p\geq n} \sqrt[p]{|a_p|} \right)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de nombres de $[0, +\infty]$. Elle a toujours une limite dans $[0, +\infty]$. (Tous les termes peuvent être éventuellement infinis).

1) On suppose ici R non nul. Si $|z| < R$, soit r un nombre réel tel que

$$|z| < r < R\,.$$

Alors
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{p\geq n}\sqrt[p]{|a_p|}\right)=\frac{1}{R}<\frac{1}{r}\,.$$
Donc il existe n_0 tel que, $n\geq n_0$ implique
$$\sup_{p\geq n}\sqrt[p]{|a_p|}\leq\frac{1}{r}\,.$$
On en déduit,
$$\sqrt[n]{|a_n|}\leq\frac{1}{r}\,,$$
donc
$$|a_n|\leq\frac{1}{r^n}\,.$$
Alors,
$$|a_n|\,|z|^n\leq\left|\frac{z}{r}\right|^n\,,$$
Comme $|z|/r<1$, le membre de droite est le terme général d'une série géométrique convergente, et la série de terme général $|a_n|\,|z|^n$ converge également. Donc la série de terme général a_nz^n converge absolument.

2) On suppose ici que R est fini. Soit $|z|>R$. Puisque
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{p\geq n}\sqrt[p]{|a_p|}\right)=\frac{1}{R}\,,$$
et, puisque la suite est décroissante, on a
$$\sup_{p\geq n}\sqrt[p]{|a_p|}\geq\frac{1}{R}\,.$$
Construisons par récurrence une suite (p_i) strictement croissante de nombres entiers telle que, pour tout i,
$$\sqrt[p_i]{|a_{p_i}|}\geq\frac{1}{R}\,.$$
On choisit un premier nombre p_0 tel que
$$\sqrt[p_0]{|a_{p_0}|}\geq\frac{1}{R}\,.$$
Si l'on a obtenu des nombres tels que
$$p_i>p_{i-1}>\cdots>p_0\,,$$
on a
$$\sup_{p\geq p_i+1}\sqrt[p]{|a_p|}\geq\frac{1}{R}\,,$$

et l'on peut trouver $p_{i+1} > p_i + 1$ tel que

$$\sqrt[p_{i+1}]{|a_{p_{i+1}}|} \geq \frac{1}{R},$$

ce qui donne le terme au rang $i + 1$.

On obtient alors pour tout i

$$|a_{p_i}|\,|z|^{p_i} \geq \left(\frac{|z|}{R}\right)^{p_i}.$$

Mais la suite p_i est une suite strictement croissante d'entiers et tend vers $+\infty$. Comme $|z|/R > 1$, la suite $((|z|/R)^{p_i})$ tend donc vers $+\infty$ et $(|a_{p_i}|\,|z|^{p_i})$ également. La suite $(a_p z^p)$ n'est donc pas bornée. En particulier elle ne tend pas vers 0 et la série de terme général $a_n z^n$ diverge.

3) Les questions 1) et 2) montrent que R est exactement le rayon de convergence de la série entière.

4) On a

$$\sup_{p \geq n} \sqrt[p]{\frac{1}{|a_p|}} = \frac{1}{\inf\limits_{p \geq n} \sqrt[p]{|a_p|}},$$

Donc

$$\frac{1}{R'} = \lim_{n \to +\infty} \sup_{p \geq n} \sqrt[p]{\frac{1}{|a_p|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} \inf\limits_{p \geq n} \sqrt[p]{|a_p|}},$$

d'où l'on déduit

$$R' = \lim_{n \to +\infty} \inf_{p \geq n} \sqrt[p]{|a_p|} \leq \lim_{n \to +\infty} \sup_{p \geq n} \sqrt[p]{|a_p|} = \frac{1}{R}.$$

En prenant

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2p+1 \\ 2^{-n} & \text{si } n = 2p \end{cases}$$

on obtient une série entière de rayon $\inf(1, 2) = 1$, alors que

$$\frac{1}{a_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2p+1 \\ 2^{n} & \text{si } n = 2p \end{cases}$$

donne une série entière de rayon $\inf(1, 1/2) = 1/2$.

En prenant

$$a_n = \begin{cases} n! & \text{si } n = 2p+1 \\ 1/n! & \text{si } n = 2p \end{cases}$$

on obtient une série entière de rayon nul, ainsi que

$$\frac{1}{a_n} = \begin{cases} 1/n! & \text{si } n = 2p+1 \\ n! & \text{si } n = 2p \end{cases}.$$

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites équivalentes de nombres réels telles que, pour tout entier n le nombre b_n soit strictement positif, la série de terme général b_n diverge, et la série entière de coefficient b_n soit de rayon 1.

1) Montrer que la série entière de coefficient a_n a pour rayon de convergence 1.

2) Montrer que la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1^-.

3) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

quand x tend vers 1^-.

1) Puisque les suites (a_n) et (b_n) sont équivalentes, on a, pour tout x réel

$$a_n x^n \sim b_n x^n ,$$

et les séries de termes généraux $a_n x^n$ et $b_n x^n$ sont de même nature. Notons R le rayon de convergence de la première. Alors lorsque $|x| > 1$ la série de terme général $b_n x^n$ diverge, donc la série de terme général $a_n x^n$ diverge, ce qui montre que $R \leq 1$. Lorsque $|x| < 1$ la série de terme général $b_n x^n$ converge, donc la série de terme général $a_n x^n$ converge, ce qui montre que $R \geq 1$. On en déduit que $R = 1$.

2) Notons

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k ,$$

et, lorsque $|x| < 1$,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k .$$

Remarquons tout d'abord que, puisque les nombres b_n sont positifs, la fonction g_n est croissante et positive sur $[\,0, +\infty\,[$.

La série de terme général b_n diverge, donc, pour tout nombre A, il existe un entier N tel que

$$g_N(1) > A + 1 .$$

Comme la fonction g_N est continue en 1, il existe $\alpha > 0$, tel que $1 - \alpha < x < 1$ implique

$$0 \leq g_N(1) - g_N(x) < 1 .$$

Alors,
$$g(x) \geq g_N(x) = g_N(1) - (g_N(1) - g_N(x)) > A + 1 - 1 = A\,,$$
ce qui montre que $g(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1^-.

3) Pour tout $n \geq 0$, posons
$$\varepsilon_n = \frac{a_n}{b_n} - 1\,,$$
ce qui est possible puisque $b_n > 0$. On a donc
$$a_n = b_n + b_n\varepsilon_n\,,$$
et, puisque les suites (a_n) et (b_n) sont équivalentes, la suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0. Alors, lorsque $|x| < 1$, on obtient en sommant
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = g(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n\varepsilon_n x^n\,.$$
Montrer que
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$
quand x tend vers 1^- revient alors à montrer que
$$\frac{1}{g(x)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n\varepsilon_n x^n$$
tend vers 0 quand x tend vers 1^-.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $n \geq N$ implique $0 \leq \varepsilon_n < \varepsilon/2$. Alors, lorsque $0 \leq x < 1$, on a
$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n\varepsilon_n x^n \leq \sum_{n=0}^{N-1} b_n\varepsilon_n x^n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N}^{\infty} b_n x^n \leq \sum_{n=0}^{N-1} b_n\varepsilon_n x^n + \frac{\varepsilon}{2}\, g(x)\,,$$
ou encore
$$0 \leq \frac{1}{g(x)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n\varepsilon_n x^n \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{g(x)} \sum_{n=0}^{N-1} b_n\varepsilon_n x^n\,.$$
Mais d'après 2) la fonction g admet $+\infty$ comme limite en 1^-, d'où
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{g(x)} \sum_{n=0}^{N-1} b_n\varepsilon_n x^n = 0\,.$$
Donc il existe $\alpha > 0$ tel que $1 - \alpha < x < 1$ implique
$$\frac{1}{g(x)} \sum_{n=0}^{N-1} b_n\varepsilon_n x^n < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Alors
$$0 < \frac{1}{g(x)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n < \varepsilon\,,$$
ce qui montre que $\displaystyle\frac{1}{g(x)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon_n x^n$ tend vers 0 quand x tend vers 1^-.

> Soit des séries entières de coefficients a_n et b_n, de rayons de convergence respectifs non nuls r et r', et de sommes respectives $f(z)$ et $g(z)$.
> 1) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière de coefficients $a_n b_n$ vérifie
> $$R \geq rr'\,.$$
> On note $h(z)$ la somme de cette série (produit d'Hadamard).
> 2) Etablir l'existence d'un voisinage V de 0 tel que, pour tous z et z' de V, on ait
> $$h(zz') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(ze^{i\theta}) g(z'e^{-i\theta})\, d\theta\,.$$
> 3) Montrer que
> $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\sin\theta)\, d\theta\,.$$

1) Soit z tel que $|z| < rr'$, donc
$$\frac{|z|}{r} < r'\,,$$
et il existe v tel que
$$\frac{|z|}{r} < v < r'\,.$$
Si l'on pose
$$u = \frac{z}{v}\,,$$
on a
$$|u| = \frac{|z|}{v} < r\,.$$
On a donc trouvé u et v tels que $z = uv$ et
$$|u| < r \quad \text{et} \quad |v| < r'\,.$$
La suite $(|b_n v^n|)$ est alors majorée par une constante K. Donc
$$|a_n b_n z^n| = |a_n u^n|\,|b_n v^n| \leq K\,|a_n u^n|\,,$$

et la série de terme général $a_n u^n$ converge absolument. Alors la série de terme général $a_n b_n z^n$ converge absolument, et donc

$$R \geq rr' .$$

2) Lorsque $|z| < r$ et $|z'| < r'$, les séries de fonctions continues de termes généraux u_n et v_n définies par

$$u_n(\theta) = a_n z^n e^{in\theta} \quad \text{et} \quad v_n(\theta) = b_n z'^n e^{-in\theta}$$

convergent uniformément sur $[\,0,\, 2\pi\,]$. Alors, on peut effectuer leur produit de Cauchy qui converge uniformément sur $[\,0,\, 2\pi\,]$. Donc

$$\begin{aligned} f(ze^{i\theta})g(z'e^{-i\theta}) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n e^{in\theta}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z'^n e^{-in\theta}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^k z'^{n-k} e^{i(2k-n)\theta}\right) . \end{aligned}$$

En raison de la convergence uniforme on peut alors inverser les sommations et

$$\int_0^{2\pi} f(ze^{i\theta})g(z'e^{-i\theta})\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^k z'^{n-k} \int_0^{2\pi} e^{i(2k-n)\theta}\, \theta\right) .$$

Mais l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ip\theta}\, d\theta$ est nulle lorsque p est non nul, et vaut 2π lorsque p est nul. Donc dans la série précédente, toutes les intégrales son nulles sauf lorsque lorsque $n = 2p$ et $k = p$, et il reste donc

$$\int_0^{2\pi} f(ze^{i\theta})g(z'e^{-i\theta})\, d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_p b_p z^p z'^p = 2\pi h(zz') ,$$

ce qui donne la formule voulue.

3) Prenons

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}\, z^n = e^{z/2} \quad \text{et} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}\, z^n = e^{-z/2} .$$

Ce sont deux séries de rayon de convergence infini. Donc on peut appliquer la formule précédente avec $z = z' = 1$, et l'on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})g(e^{-i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{2}e^{i\theta}}\, e^{-\frac{1}{2}e^{-i\theta}}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\sin\theta}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos\sin\theta + i\sin\sin\theta)\, d\theta . \end{aligned}$$

Mais puisque la fonction qui à θ associe $\sin\sin\theta$ est $2\pi-$périodique et impaire, on a

$$\int_0^{2\pi} \sin\sin\theta\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin\sin\theta\, d\theta = 0\,,$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\sin\theta\, d\theta\,.$$

1) Soit f une fonction C^∞ sur un intervalle $I =]-A,\, A[$, (A fini ou non), telle que, pour tout entier naturel n et tout x dans I, on ait $f^{(n)}(x) \geq 0$.
1.a Montrer que f est développable en série entière dans I.
1.b Montrer que $g = e^f$ est développable en série entière dans I.
1.c Montrer que si $A > 1$, la fonction h définie par

$$h(x) = f(e^x)$$

est développable en série entière dans $]-\ln A,\, \ln A[$.
2) Lorsque f est paire ou impaire, montrer que si, pour tout entier naturel n et tout x dans $[0,\, A[$, on a $f^{(n)}(x) \geq 0$, alors f est développable en série entière dans I.
3) Montrer que les fonctions définies ci-dessous, sont développables en série entière et trouver leur rayon de convergence.
3.a $f(x) = \tan x$,
3.b $g(x) = \exp(\exp x)$,
3.c $k(x) = \exp \dfrac{x}{1-x}$,
3.d $h(x) = \dfrac{1}{a - e^x}$, où $a > 1$.

1.a) Posons

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,,$$

et étudions la série entière de coefficient a_n. Les nombres a_n sont tous positifs.

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, on a, pour tout x de I,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, dt\,.$$

Lorsque $0 \leq x < A$, l'intégrale est positive et donc

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leq f(x)\,.$$

Il en résulte que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)$ est croissante majorée. Elle converge donc, et la série entière de coefficient a_n a un rayon de convergence supérieur ou égal à A. Etudions le reste $R_n(x)$ de cette série. On a, en effectuant le changement de variable $t = ux$,

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux)\,du\,.$$

Les fonction $f^{(n)}$ étant toutes positives, sont également toutes croissantes.

Si l'on a $0 < x < y < A$, et si u appartient à $[\,0,\,1\,]$, on a donc

$$(1-u)^n f^{(n+1)}(ux) \leq (1-u)^n f^{(n+1)}(uy)\,,$$

et en intégrant on en déduit que

$$R_n(x)x^{-(n+1)} \leq R_n(y)y^{-(n+1)}\,.$$

En utilisant le fait que

$$0 \leq R_n(y) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k y^k \leq f(y)\,,$$

on en déduit que

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)\,,$$

et il résulte du théorème d'encadrement que la suite $(R_n(x))$ converge vers 0. Donc, pour tout x de $[\,0,\,A\,[$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

Lorsque x appartient à $]\,-A,\,0\,[$ et u à $[\,0,\,1\,]$, on a

$$f^{(n+1)}(ux) \leq f^{(n+1)}(0)\,.$$

Donc cette fois,

$$0 \leq R_n(x)x^{-(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(0)\,du = a_{n+1}\,,$$

et l'on en déduit

$$|R_n(x)| \leq a_{n+1}|x|^{n+1}\,.$$

Mais, puisque la série de terme général $a_n|x|^n$ converge, la suite $(a_n|x|^n)$ converge vers 0, et la suite $(R_n(x))$ converge aussi vers 0. On obtient donc, de nouveau

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

La fonction f est bien développable en série entière dans $]-A,\, A[$.

1.b) Puisque l'on a

$$g'(x) = g(x)f'(x)\,,$$

on obtient, en dérivant grâce à la formule de Leibniz,

$$g^{(n+1)}(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} g^{(p)}(x) f^{(n-p+1)}(x)\,.$$

Par hypothèse, les fonctions $f^{(k)}$ sont positives sur $]-A,\, A[$. Alors, si, par hypothèse de récurrence, les fonctions $g,\, g',\ldots,\, g^{(n)}$ sont positives, il en sera de même de $g^{(n+1)}$. Donc toutes les dérivées de g sont positives et l'on peut appliquer 1.a).

1.c) Tout d'abord, h est définie si

$$-A < e^x < A$$

et donc si

$$-\ln A < x < \ln A\,.$$

Montrons par récurrence que, si $n \geq 1$, on a

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k}\, e^{kx} f^{(k)}(e^x)\,,$$

où les nombres $\lambda_{n,k}$ sont positifs. C'est vrai si $k = 1$ car

$$h'(x) = e^x f'(e^x)\,.$$

Si l'on suppose la propriété vraie à l'ordre n, on obtient en dérivant

$$\begin{aligned} h^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} k e^{kx} f^{(k)}(e^x) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} e^{(k+1)x} f^{(k+1)}(e^x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} k e^{kx} f^{(k)}(e^x) + \sum_{k=2}^{n+1} \lambda_{n,k-1} e^{kx} f^{(k)}(e^x) \\ &= \lambda_{n,1} e^x f'(e^x) + \sum_{k=2}^{n} (k\lambda_{n,k} + \lambda_{n,k-1}) e^{kx} f^{(k)}(e^x) + \lambda_{n,n} e^{(n+1)x} f^{(n+1)}(e^x)\,. \end{aligned}$$

En posant

$$\lambda_{n+1,1} = \lambda_{n,1}\ ,\ \lambda_{n+1,n+1} = \lambda_{n,n}$$

et, si $2 \leq k \leq n$,

$$\lambda_{n+1,k} = k\lambda_{n,k} + \lambda_{n,k-1}\,,$$

on obtient

$$h^{(n+1)}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{n+1,k} e^{kx} f^{(k)}(e^x)\,,$$

où les nombres $\lambda_{n+1,k}$ sont positifs.

Alors, puisque les fonctions f, f',..., $f^{(n)}$ sont positives, il en sera de même de $h^{(n)}$. Donc toutes les dérivées de h sont positives et l'on peut appliquer 1.a).

Remarque : ce qui précède peut se généraliser pour la composée de fonctions dont toutes les dérivées sont positives.

2) La démonstration effectuée dans la question 1.a) pour x dans $[0, A[$ subsiste et, dans ce cas,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Si f est impaire alors, pour tout entier n, on a $a_{2n} = 0$, et donc pour tout x de $[0, A[$, on obtient

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} .$$

Alors, pour tout x dans $]-A, 0[$,

$$f(x) = -f(-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}(-x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} .$$

Méthode analogue lorsque f est paire.

3.a) La fonction f définie par

$$f(x) = \tan x$$

est de classe C^{∞} sur $]-\pi/2, \pi/2[$. On démontre par récurrence qu'il existe une suite de polynômes P_n à coefficients dans $\mathbb{N}$ tels que, pour tout entier n et tout x dans $]-\pi/2, \pi/2[$, on ait

$$f^{(n)}(x) = P_n(\tan x) .$$

La propriété est vraie pour $n = 0$, en prenant $P_0(X) = X$. Si elle est vraie à l'ordre n, alors

$$f^{(n+1)}(x) = (1 + \tan^2 x) P_n'(\tan x) = P_{n+1}(\tan x)$$

en posant

$$P_{n+1}(X) = (1 + X^2) P_n'(X) .$$

Si P_n est à coefficients entiers positifs, il en est de même de P_n' et donc du produit $(1+X^2)P_n'(X)$. Il en résulte que P_{n+1} est aussi à coefficients entiers positifs. Alors, quelque soit n, la fonction $f^{(n)}$ sera positive sur $[0, \pi/2[$, et puisque f est impaire, on peut appliquer la question 2 : la fonction f est développable en série entière de rayon de convergence au moins $\pi/2$.

Comme $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $\pi/2$, le rayon de convergence est nécessairement inférieur ou égal à $\pi/2$. Il vaut donc exactement $\pi/2$.

3.b) La fonction f définie par

$$f(x) = \exp x$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et a toutes ses dérivées positives. Alors d'après 1.b), la fonction g définie par

$$g(x) = e^{f(x)}$$

est développable en série entière de rayon infini.

3.c) Si l'on pose, pour x de $]-1, 1[$,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}\,,$$

on montre facilement par récurrence que,

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\,.$$

Toutes les dérivées $f^{(k)}$ sont donc positives sur $]-1, 1[$.

D'après 1.b), la fonction $g = e^f$ est développable en série entière dans $]-1, 1[$. Alors, il en est de même de

$$k = \exp(f-1) = \frac{1}{e}\, e^f\,.$$

Comme de plus f a une limite infinie quand x tend vers 1^-, on a exactement $R = 1$.

3.d) Si l'on pose, pour x différent de a,

$$f(x) = \frac{1}{a-x} = (a-x)^{-1}\,,$$

on obtient cette fois

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(a-x)^{k+1}}\,.$$

Toutes les dérivées $f^{(k)}$ sont donc positives sur $]-a, a[$.

Alors d'après 1.c), la fonction h définie par

$$h(x) = f(e^x)$$

est développable en série entière dans $]-\ln a, \ln a[$.

Comme de plus f a une limite infinie quand x tend vers $\ln a^-$, on a exactement $R = \ln a$.

1) Soit (a_n) une suite de nombres complexes. On suppose que la série entière de coefficient a_n a pour rayon de convergence R. Déterminer les rayons de convergence des séries entières de coefficients $a_n \ln n$ et $a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2) Donner un équivalent simple quand x tend vers 1^- de

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln n \, x^n \,.$$

1) Soit R_1 le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n \ln n \, x^n$. On écrit

$$|a_n \ln n \, x^n| = |a_n|\rho^n \ln n \left(\frac{|x|}{\rho}\right)^n \,.$$

Lorsque $|x| < \rho < R$, la suite $(\ln n \, (|x|/\rho)^n)$ converge vers 0. Elle est donc bornée. Si M est un majorant on a alors

$$|a_n \ln n \, x^n| \leq M|a_n|\rho^n \,,$$

et la série de terme général $a_n \ln n \, x^n$ converge. Il en résulte que $R_1 \geq \rho$, et donc que $R_1 \geq R$.

Inversement, puisque, pour $n \geq 2$, on a

$$|a_n| \leq |a_n| \ln n \,,$$

on en déduit que $R \geq R_1$. Finalement $R_1 = R$.

En utilisant l'équivalent

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$$

on en déduit alors que la deuxième série proposée admet encore comme rayon de convergence R.

2) D'après la question 1) appliquée à la suite constante $(a_n) = (1)$, les séries entières de terme généraux $\ln n \, x^n$ et $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$ sont de rayon de convergence 1. La suite (ε_n) définie par

$$\varepsilon_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

converge (sa limite est la constante d'Euler). Elle est donc majorée par une constante M. Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x^n \,.$$

Mais en effectuant le produit de Cauchy, on obtient, pour $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1-x}\,(-\ln(1-x)) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) x^n\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \ln n\, x^n &= -\frac{\ln(1-x)}{1-x} - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x^n\\ &= -\frac{\ln(1-x)}{1-x}\left(1+\frac{1-x}{\ln(1-x)}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n x^n\right)\,.\end{aligned}$$

Lorsque $0 < x < 1$, on a

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n x^n\right| \leq \frac{M}{1-x}\,,$$

donc

$$\left|\frac{1-x}{\ln(1-x)}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n x^n\right| \leq \frac{M}{|\ln(1-x)|}\,,$$

et il en résulte que cette expression tend vers 0 lorsque x tend vers 1. On en déduit que, lorsque x tend vers 1, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n\, x^n \sim -\frac{\ln(1-x)}{1-x}\,.$$

Soit a_n le coefficient d'une série entière S de rayon R. Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, et R' le rayon de convergence de la série entière T de coefficient $b_n = a_{\varphi(n)}$.

1) Montrer que si $R > 1$ alors $R' \geq 1$, et que si $R < 1$, alors $R' \leq 1$.

2) Montrer que si S est une série paire alors, pour toute suite strictement croissante $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres entiers naturels, telle que l'ensemble

$$E = \mathbb{N} \setminus \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

soit dénombrable, on peut trouver une bijection φ telle que la série T soit la série de terme général $a_{2n}x^{u_n}$.

3) En utilisant ce qui précède, construire des exemples dans les cas suivants

3.1 $R = 0$ et $R' = 1$;

3.2 $R = 1/p$ et $R' = 1$, où p est un entier naturel plus grand que 2 ;

3.3 $R = \infty$ et $R' = 1$;

3.4 $R = p$ et $R' = 1$, où p est un entier naturel plus grand que 2 ;

3.5 $R = 4$ et $R' = 2$.

1) Si $R > 1$, la suite (a_n) est bornée. Alors la suite $(a_{\varphi(n)})$ est bornée également, et donc $R' \geq 1$.

Si l'on a $R' > 1$, alors, en appliquant ce qui précède à la suite $(a_{\varphi(n)})$ avec la bijection φ^{-1}, on en déduit que $R \geq 1$. Donc si $R < 1$, on a nécessairement $R' \leq 1$.

2) Soit I l'ensemble des nombres impairs positifs. Les ensembles E et I étant dénombrables, il existe une bijection φ_1 de E sur I. Alors l'application φ définie par

$$\varphi(n) = \begin{cases} 2p & \text{si } n = u_p \\ \varphi_1(n) & \text{sinon} \end{cases}$$

est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, et l'on a

$$a_{\varphi(n)} = \begin{cases} a_{2p} & \text{si } n = u_p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Donc, si la série S est la série de terme général $a_{2n}x^{2n}$, on en déduit que la série T est la série de terme général $a_{2n}x^{u_n}$.

3.1 Partons de la série S de terme général $(n+1)!x^{2n}$ qui est de rayon nul. Alors en prenant

$$u_n = (n+1)!\,,$$

la série T est la série de terme général

$$v_n(x) = (n+1)!\,x^{(n+1)!}\,.$$

En particulier,

$$0 \leq b_n \leq n\,,$$

et la série est de rayon plus grand que 1, mais comme elle diverge si $x = 1$, la série est de rayon $R' = 1$.

3.2 Partons de la série S de terme général $p^{2n}x^{2n}$ qui est de rayon $R = 1/p$. Alors en prenant

$$u_n = p^{2n}\,,$$

la série T est la série de terme général

$$v_n(x) = p^{2n}x^{p^{2n}}\,.$$

Le même raisonnement que dans 3.1 montre que $R' = 1$.

3.3 Partons de la série S de terme général $x^{2n}/(n+1)!$ qui est de rayon infini. Alors en prenant

$$u_n = (n+1)!\,,$$

la série T est la série de terme général

$$v_n(x) = \frac{x^{(n+1)!}}{(n+1)!}\,.$$

Si l'on applique la règle d'Alembert on obtient

$$\frac{|v_n(x)|}{|v_{n-1}(x)|} = \frac{1}{n+1}|x|^{nn!},$$

et ceci converge vers 0 si $|x| < 1$, et tend vers l'infini si $|x| > 1$. La rayon de convergence vaut donc $R' = 1$.

3.4 Partons de la série S de terme général x^{2n}/p^{2n} qui est de rayon $R = p$. Alors en prenant

$$u_n = p^{2n},$$

la série T est la série de terme général

$$v_n(x) = \frac{x^{p^{2n}}}{p^{2n}}.$$

On a cette fois

$$\frac{|v_{n+1}(x)|}{|v_n(x)|} = \frac{|x|^{p^{2n}(p^2-1)}}{p^2}$$

avec la même conclusion que dans 3.3 .

3.5 Partons de la série S de terme général $x^{2n}/4^{2n}$ qui est de rayon $R = 4$. Alors en prenant

$$u_n = 4n,$$

la série T est la série de terme général

$$v_n(x) = \frac{x^{4n}}{2^{4n}},$$

qui est de rayon $R' = 2$.

1) Soit une série entière de coefficient a_n et de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que la série de coefficient $a_n/n!$ est de rayon de convergence infini.
2) Pour tout nombre réel t on pose

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n.$$

Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x > r$, la fonction φ définie par

$$\varphi(t) = f(t)e^{-xt}$$

soit intégrable sur $[0, \infty[$ et exprimer cette intégrale sous forme de série entière en $1/x$.

1) Soit z un nombre complexe. Soit t un nombre réel tel que $t > |z|/R$. Alors $|z|/t < R$. Donc, puisque la série de coefficient a_n est de rayon R, la suite $(|a_n z^n|/t^n)$ est bornée. Si M est un majorant de cette suite, on a alors

$$\frac{|a_n|}{n!}\,|z|^n = \frac{|a_n z^n|}{t^n}\,\frac{t^n|z|^n}{n!} \leq M\frac{t^n|z|^n}{n!}\,,$$

et comme la série de terme général $(t^n|z|^n/n!)$ converge, puisque c'est la série de l'exponentielle, il en résulte que la série de terme général $a_n z^n/n!$ converge. C'est donc une série de rayon infini. En particulier la fonction f est continue sur $[\,0,\,+\infty\,[$.

2) Lorsque x est strictement positif, étudions l'intégrale

$$I_n(x) = \int_0^\infty t^n e^{-xt}\,dt\,.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$I_n(x) = \frac{n}{x}\,I_{n-1}(x)\,,$$

avec

$$I_0(x) = \frac{1}{x}\,,$$

et l'on en déduit que

$$I_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}\,.$$

Alors la série de terme général

$$\frac{a_n I_n(x)}{n!} = \frac{a_n}{x^{n+1}}$$

converge lorsque $1/x > R$. D'autre part la série de terme général $a_n t^n e^{-xt}/n!$ converge simplement sur $[\,0,\,\infty\,[$, vers la fonction continue φ. Il résulte alors du théorème de sommation terme à terme que, lorsque $x > r = 1/R$, la fonction φ est intégrable sur $[\,0,\,\infty\,[$ et que

$$\int_0^\infty f(t)e^{-tx} = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!}\,I_n(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n\,\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}\,.$$

1) Montrer que, pour tout entier naturel p, il existe un polynôme R_p tel que, pour tout nombre réel x de $]-1,\,1\,[$,
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^p x^n = \frac{R_p(x)}{(1-x)^{p+1}}\,.$$
Que vaut $R_p(1)$?

2) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels admettant un développement asymptotique de la forme
$$a_n = P(n) + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\,,$$
où P est un polynôme de degré p.

2.1 Trouver le rayon de convergence R de la série entière de coefficient a_n.

2.2 Pour x dans $]-R,\,R\,[$, on pose
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$
Montrer que S admet en R une limite infinie et en $-R$ une limite finie.

1) La série entière de coefficient n^p est de rayon 1. Pour x dans $]-1,\,1\,[$, notons
$$S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^p x^n\,,$$
et montrons par récurrence sur p la propriété demandée.

Si $p = 0$, on a
$$S_p(x) = \frac{1}{1-x}\,,$$
et la propriété est vraie en prenant $P_0 = 1$.

Supposons la propriété vraie à l'ordre p. Alors en dérivant
$$S_p(x) = \frac{R_p(x)}{(1-x)^{p+1}}\,,$$
on obtient
$$S_p'(x) = \frac{(1-x)R_p'(x) + (p+1)R_p(x)}{(1-x)^{p+2}}\,.$$
Si l'on pose
$$R_{p+1}(x) = x[(1-x)R_p'(x) + (p+1)R_p(x)]\;,$$
on obtient un polynôme tel que
$$S_{p+1}(x) = xS_p'(x) = \frac{R_{p+1}(x)}{(1-x)^{p+2}}\,.$$

La propriété est donc vraie à l'ordre $p+1$. Il en résulte qu'elle est vraie pour tout entier naturel p.

De plus
$$R_{p+1}(1) = (p+1)R_p(1)\,,$$
avec
$$R_0(1) = 1\,.$$
On en déduit donc que
$$R_p(1) = p!\,.$$
2.1 Si le terme de plus haut degré de $P(X)$ est λX^p, on a alors
$$a_n \sim \lambda n^p\,,$$
et la série entière de coefficient a_n a même rayon de convergence que la série entière de coefficient n^p. On a donc $R = 1$.

2.2 • Etude en 1.

Soit ε le signe de λ. La suite $(\varepsilon a_n/n^p)$ converge vers $|\lambda|$, donc, à partir d'un certain rang n_0,
$$\frac{\varepsilon a_n}{n^p} \geq \frac{|\lambda|}{2}\,,$$
soit
$$\varepsilon a_n \geq \frac{|\lambda|}{2}\,n^p\,,$$
Alors, si x appartient à $[\,0,\,1\,[$,
$$\varepsilon S(x) = \varepsilon \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \sum_{n=n_0}^{\infty} \varepsilon a_n x^n \geq \varepsilon \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \frac{|\lambda|}{2} \sum_{n=n_0}^{\infty} n^p x^n\,.$$
Donc
$$\varepsilon S(x) \geq \varepsilon \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \frac{|\lambda|}{2}\,\frac{R_p(x)}{(1-x)^{p+1}} - \frac{|\lambda|}{2} \sum_{n=0}^{n_0-1} n^p x^n\,.$$
Quand x tend vers 1, le membre de droite tend vers $+\infty$. Donc $S(x)$ tend vers l'infini avec le signe de λ.

• Etude en -1.

En écrivant, pour $n \geq 1$,
$$a_n = P(n) + \frac{\alpha}{n} + \frac{u_n}{n^2}$$
où $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite bornée, on a, si x appartient à $]-1,\,1\,[$,
$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P(n)x^n + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^2}\,x^n\,.$$

La somme $\sum_{n=1}^{\infty} P(n)x^n$ est une combinaison linéaire des sommes $S_k(x)$, pour k compris entre 0 et p. Donc d'après la question 1), il existe un polynôme Q tel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n)x^n = \frac{Q(x)}{(1-x)^{p+1}}\,.$$

Alors

$$S(x) = a_0 + \frac{Q(x)}{(1-x)^{p+1}} - \alpha\ln(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^2}\,x^n\,.$$

Puisque (u_n) est bornée, la série de terme général u_n/n^2 converge absolument et il résulte du théorème d'Abel que

$$\lim_{x\to -1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^2}\,x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n^2}\,.$$

Alors S admet une limite quant x tend vers -1, et

$$\lim_{x\to -1} S(x) = a_0 + \frac{Q(1)}{2^{p+1}} - \alpha\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n^2}\,.$$

1) Soit s un nombre entier strictement positif, et α une racine primitive $s-$ième de l'unité. En développant en série entière au voisinage de 0 de deux manières $1/(z^s-1)$, montrer que

$$\frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1} \alpha^{rk} = \begin{cases} 1 & \text{si } r = sn \\ 0 & \text{si } r \neq sn \end{cases}\,.$$

2) Soit a_n le coefficient d'une série entière de rayon R non nul et t un nombre entier positif. Si $|z| < R$, on pose

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,.$$

Montrer que, pour tout nombre complexe z de module strictement plus petit que R, on a la relation

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{sp+t} z^{sp+t} = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1} \alpha^{-kt} f(\alpha^k z)\,.$$

1) Si α une racine primitive $s-$ième de l'unité, les racines $s-$ième de l'unité sont alors $1,\ \alpha,\dots,\alpha^{s-1}$, ou encore $1,\ \alpha^{-1},\dots,\alpha^{-s+1}$.

Posons

$$Q(z) = z^s - 1\,.$$

On a donc

$$Q'(\alpha^{-k}) = s\alpha^{-k(s-1)} = s\alpha^k .$$

La fraction rationnelle $1/Q$ se décompose en éléments simples sous la forme

$$\frac{1}{Q(z)} = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\lambda_k}{z-\alpha^{-k}} ,$$

avec

$$\lambda_k = \frac{1}{Q'(\alpha^{-k})} = \frac{1}{s\alpha^k} .$$

Donc

$$\frac{1}{z^s-1} = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{\alpha^k(z-\alpha^{-k})} ,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{1-z^s} = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{1-z\alpha^k} .$$

En décomposant en série entière, on obtient, si $|z|<1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{sn} = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1}\alpha^{kr}\right) z^r ,$$

d'où, en identifiant

$$\frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1}\alpha^{kr} = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } r = sn \\ 0 & \text{si } r \neq sn \end{array}\right. .$$

2) En développant le membre de droite

$$\begin{aligned} \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1}\alpha^{-kt}f(\alpha^k z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1}\alpha^{nk}\alpha^{-kt}\right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1}\alpha^{k(n-t)}\right) z^n . \end{aligned}$$

Mais d'après la question 1), les seuls termes non nuls sont obtenus lorsque $n-t=ps$, la somme devient donc

$$\frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1}\alpha^{-kt}f(\alpha^k z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{ps+t} z^{ps+t} .$$

Soit $A = (a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels, et

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,,$$

la somme de la série entière de coefficient a_n. Soir R son rayon de convergence.
Pour tout entier naturel p, soit $A_p = (a_{n,p})_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels, et

$$S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p} x^n \,,$$

la somme de la série de coefficient $a_{n,p}$. Soit R_p son rayon de convergence.
On suppose que, pour tout p, la suite $(a_{n,p} - a_n)_{n\geq 0}$ est bornée et, en posant

$$\|A_p - A\| = \sup_{n\geq 0} |a_{n,p} - a_n| \,,$$

que la suite $(\|A_p - A\|)_{p\geq 0}$ converge vers 0 : on dira que la suite $(A_p)_{p\geq 0}$ converge uniformément vers A.

1) Pour tout entier naturel p, que peut-on dire du rayon de convergence r_p de la série de terme général $a_{n,p} - a_n$?
2) Si $0 \leq R < 1$, montrer que $R_p = R$ pour tout entier p et que la suite de fonctions (S_p) converge uniformément vers S sur $]-R, R[$.
3) Si $R \geq 1$, montrer que $R_p \geq 1$ et que la suite de fonctions (S_p) converge uniformément vers S sur $]-r, r[$, pour tout nombre r de l'intervalle $]0, 1[$.
4) Pour une suite donnée A, on pose

$$a_{n,p} = a_n + \frac{1}{p+1} \,.$$

Que peut-on dire de R_p ?
5) Soit une suite A, de limite nulle, dont la série associée est de rayon $R = 1$. Trouver des suites A_p associées à des séries de rayon infini telles que la suite $(A_p)_{p\geq 0}$ converge uniformément vers A.

1) Comme

$$|a_{n,p} - a_n| \leq \|A_p - A\| \,,$$

la série entière de coefficient $a_{n,p} - a_n$ a un rayon de convergence r_p supérieur à celui de la série géométrique de terme général x^n. Donc

$$r_p \geq 1 \,.$$

2) Lorsque la série entière de coefficient a_n a un rayon $R < 1$, la somme des séries entières de coefficients a_n et $a_{n,p} - a_n$ a pour rayon

$$R_p = \min(R, r_p) = R \,.$$

Alors, si $-R < x < R$, on a

$$|S_p(x) - S(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,p} - a_n|\, |x|^n \leq \|A_p - A\| \sum_{n=0}^{\infty} |x|^n = \frac{\|A_p - A\|}{1 - |x|}\,,$$

donc

$$\|\, S_p - S\,\|_\infty \leq \frac{\|A_p - A\|}{1 - R}\,.$$

Il en résulte que la suite (S_p) converge uniformément vers S sur $\,]-R,\, R\,[\,$.

3) Lorsque $R \geq 1$, on a toujours $r_p \geq 1$, mais on peut seulement assurer que

$$R_p \geq \min(R, r_p) \geq 1\,.$$

Alors, si $-r \leq x \leq r$ où $0 < r < 1$, on obtient cette fois

$$|S_p(x) - S(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,p} - a_n|\, |x|^n \leq \frac{\|A_p - A\|}{1 - r}\,.$$

Il en résulte que la suite (S_p) converge uniformément vers S sur $\,]-r,\, r\,[\,$.

4) Si l'on pose

$$a_{n,p} = a_n + \frac{1}{p+1}\,,$$

on a

$$\|A_p - A\| = \frac{1}{p+1}\,,$$

et la suite (A_p) converge uniformément vers A. Par ailleurs la série entière de terme général $a_{n,p}x^n$ est la somme d'une série entière de rayon R et d'une série géométrique de rayon 1.

• Si $0 \leq R < 1$, on sait que $R_p = R$.

• Si $R > 1$, on a

$$R_p = \min(R, 1) = 1\,.$$

• Si $R_p = 1$, on a *a priori*

$$R_p \geq 1\,.$$

Supposons qu'il existe deux indices distincts p et q tels que $R_p > 1$ et $R_q > 1$. Alors la série entière de coefficient $a_{n,p} - a_{n,q}$ a un rayon strictement plus grand que 1, ce qui n'est pas possible car

$$a_{n,p} - a_{n,q} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1}$$

est constant, donc est le coefficient d'une série géométrique de rayon 1. Il ne peut y avoir qu'un rayon R_p au plus strictement plus grand que 1. Tous les autres sont égaux à 1.

5) Posons

$$a_{n,p} = \begin{cases} a_n & \text{si } 0 \leq n \leq p \\ 0 & \text{si } n \geq p+1 \end{cases} .$$

La série de coefficient $a_{n,p}$ est alors un polynôme, donc de rayon infini. Par ailleurs, on a

$$\|A_p - A\| = \sup_{n \geq p+1} |a_n| .$$

Si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0, il en est de même de la suite $(\|A_p - A\|)_{p\geq 0}$ et la suite (A_p) converge uniformément vers A.

Remarque : cette étude montre que la rayon de convergence d'une série entière ne dépend pas continûment des coefficients de la série.

Chapitre 7

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Chercher la fonction y développable en série entière au voisinage de 0, solution de l'équation différentielle

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = e^x\,.$$

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

On a donc

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\,.$$

Posons

$$\mathscr{E}(x) = x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x)\,.$$

On a alors

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n\,,$$

d'où l'on déduit

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+3n+2)a_n\, x^n\,.$$

Comme cette série entière doit être celle de e^x, on doit avoir l'égalité des coefficients soit

$$(n^2+3n+2)a_n = \frac{1}{n!}\,,$$

ce qui donne

$$a_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)n!} = \frac{1}{(n+2)!}\,.$$

Cette série est de rayon infini ce qui justifie les calculs précédents. On obtient alors

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}\,,$$

et donc, si x est non nul,

$$y(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}\,.$$

On a par ailleurs

$$y(0) = \frac{1}{2}\,.$$

Chercher la fonction y développable en série entière au voisinage de 0, solution de l'équation différentielle

$$y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x) = 0$$

vérifiant les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

On a donc

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\,.$$

Posons

$$\mathscr{E}(x) = y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x)\,.$$

On a alors

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n\,.$$

d'où, en remarquant que na_n est nul si $n = 0$,

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n\,.$$

En changeant d'indice de sommation dans la première somme,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n\,,$$

donc
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_nx^n\,,$$
ou encore
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)a_n]x^n\,.$$
Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc, pour tout entier $n \geq 0$,
$$(n+1)(n+2)a_{n+2} - 2(n+1)a_n = 0\,,$$
soit, puisque $(n+1)(n+2)$ n'est pas nul,
$$a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+2}\,.$$
Par ailleurs
$$a_0 = y(0) = 1 \quad \text{et} \quad a_1 = y'(0) = 0\,.$$
Il en résulte que tous les coefficients impairs sont nuls. Cherchons les coefficients pairs en posant $n = 2p$. On a alors
$$a_{2(p+1)} = \frac{a_{2p}}{p+1}\,,$$
d'où l'on déduit
$$a_{2p} = \frac{a_0}{p!} = \frac{1}{p!}\,.$$
Alors
$$y(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^{2p}}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(x^2)^p}{p!} = e^{x^2}\,.$$
La série obtenue est de rayon infini ce qui légitime les calculs effectués.

Chercher la fonction y développable en série entière au voisinage de 0, solution de l'équation différentielle
$$y'' + xy' + y = 0\,,$$
vérifiant les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\,.$$
On a donc
$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}\,.$$

Posons
$$\mathscr{E}(x) = y''(x) + xy'(x) + y(x) .$$
On a alors
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ,$$
ou encore
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$
Finalement
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n]\, x^n .$$
Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc, pour tout entier $n \geq 0$,
$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0 ,$$
soit
$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2} .$$
Les conditions initiales se traduisent par $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Il résulte alors immédiatement de la relation ci-dessus que tous les coefficients de rang impair sont nuls.

Pour les coefficients de rang pair, on a donc, si $p \geq 0$,

$$(\star) \qquad a_{2p+2} = -\frac{a_{2p}}{2p+2} .$$

Tous les coefficients se calculent en fonction de a_0 et ils ne sont pas nuls si $a_0 \neq 0$. Donc si R est le rayon de convergence de la série,

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{|a_{2p}|}{|a_{2p+2}|} = \lim_{p \to +\infty} (2p+2) = +\infty = R^2 .$$

La série obtenue est de rayon infini, et les calculs précédents sont valables dans $\mathbb{R}$ tout entier. De la relation $(\star)$ on tire immédiatement par récurrence que, si $p \geq 0$,

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p)(2p-2)\cdots 2}\, a_0 = \frac{(-1)^p}{2^p p!} .$$

Alors
$$y(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^p p!} x^{2p} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{-x^2}{2} \right)^p = e^{-x^2/2} .$$

Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle
$$(1+x^2)y''+2xy'-2y=2\,.$$

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par
$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\,.$$
On a donc
$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\quad\text{et}\quad y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}\,.$$
Posons
$$\mathscr{E}(x)=(1+x^2)y''(x)+2xy'(x)-2y(x)\,.$$
On a alors
$$\mathscr{E}(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n\,,$$
ou encore
$$\mathscr{E}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}2na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n\,.$$
Finalement
$$\mathscr{E}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n^2+n-2)a_n]\,x^n\,.$$
Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ est la constante 2, on doit avoir
$$2a_2-2a_0=2\,,$$
donc
$$a_2=a_0+1\,,$$
et, pour tout $n\geq 1$,
$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n^2+n-2)a_n=0\,,$$
ou encore, en simplifiant par $n+2$
$$(n+1)a_{n+2}+(n-1)a_n=0\,.$$
En particulier, si $n=1$, on en tire $a_3=0$, et tous les coefficients de rang impair supérieur à 3 seront nuls également. On a donc comme partie impaire de la série
$$y_I(x)=a_1x\,.$$

Pour les coefficients de rang pair, on a, si $p \geq 1$,

$$(\star) \qquad a_{2p+2} = -\frac{2p-1}{2p+1}\, a_{2p}\,.$$

Tous les coefficients se calculent en fonction de a_2 et ils ne sont pas nuls si $a_2 \neq 0$. Donc si R est le rayon de convergence de la série des termes de rang pair,

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{|a_{2p}|}{|a_{2p+2}|} = \lim_{p\to+\infty} \frac{2p+1}{2p-1} = 1 = R^2\,.$$

La série obtenue est de rayon 1, et les calculs précédents sont valables dans l'intervalle $]-1,\, 1\,[$. De la relation $(\star)$ on tire immédiatement par récurrence que, si $p \geq 0$,

$$a_{2p+2} = (-1)^p\, \frac{2p-1}{2p+1}\, \frac{2p-3}{2p-1} \cdots \frac{1}{3}\, a_2 = \frac{(-1)^p}{2p+1}\, a_2\,.$$

Alors

$$y_P(x) = a_0 + (a_0+1) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}\, x^{2p+2}\,,$$

Mais

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}\, x^{2p+2} = x \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}\, x^{2p+1} = x \arctan x\,,$$

donc

$$y_P(x) = a_0 + (a_0+1)x \arctan x\,,$$

et finalement

$$y(x) = a_0 + a_1 x + (a_0+1)x \arctan x\,.$$

Cette série est de rayon infini si $a_0 = -1$ (c'est un polynôme), et de rayon 1 sinon. Mais on remarquera que la fonction obtenue dans ce dernier cas se prolonge sur $\mathbb{R}$ tout entier, et vérifie sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle donnée.

Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle

$$xy'' + (x-1)y' - y = 0\,.$$

Pouvait-on trouver une méthode permettant de résoudre directement l'équation ?

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

On a donc
$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}\,.$$
Posons
$$\mathscr{E}(x)=xy''(x)+(x-1)y'(x)-y(x)\,.$$
On a alors
$$\mathscr{E}(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n}-\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n}\,,$$
ou encore
$$\mathscr{E}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}x^{n}+\sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n}-\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n}\,.$$
Finalement
$$\mathscr{E}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n-1)a_{n+1}+(n-1)a_n]\,x^{n}\,.$$
Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc, pour tout entier $n\geq 0$,
$$(n+1)(n-1)a_{n+1}+(n-1)a_n=0\,.$$
L'égalité est vraie si $n=1$. Dans le cas contraire on peut simplifier par $n-1$ et on obtient
$$(n+1)a_{n+1}+a_n=0\,.$$
En particulier
$$a_1+a_0=0\,,$$
et si $n\geq 2$
$$(\star)\qquad a_{n+1}=-\frac{a_n}{n+1}\,.$$
Tous les coefficients se calculent en fonction de a_2 et ils ne sont pas nuls si $a_2\neq 0$. Donc si R est le rayon de convergence de la série,
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty=R\,.$$
La série obtenue est de rayon infini, et les calculs précédents sont valables dans $\mathbb{R}$ tout entier. De la relation $(\star)$ on tire immédiatement par récurrence que, si $n\geq 2$,
$$a_n=\frac{(-1)^{n-2}}{n(n-1)\cdots 3}\,a_2=\frac{2(-1)^n}{n!}\,a_2\,.$$
et finalement
$$y(x)=a_0-a_0x+2a_2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,x^n\,.$$

Mais
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x^n = e^{-x} - 1 + x\,,$$
donc
$$y(x) = (a_0 - 2a_2) + (2a_2 - a_0)x + 2a_2 e^{-x}\,.$$
Si l'on pose
$$2a_2 - a_0 = A \quad \text{et} \quad 2a_2 = B\,,$$
on a donc
$$y(x) = A(x-1) + Be^{-x}\,.$$
On peut trouver ces solutions directement en écrivant l'équation différentielle sous la forme
$$x(y'' + y') - (y' + y) = 0\,.$$
En posant
$$z = y + y'\,,$$
on a donc
$$xz' - z = 0\,.$$
Les solutions de cette équations sont les fonctions z définies par
$$z(x) = Ax\,,$$
où A est une constante. On résout alors
$$y' + y = Ax\,.$$
Elle admet $y_0(x) = A(x-1)$ comme solution particulière, et l'équation sans second membre $y' + y = 0$ admet comme solutions $y(x) = Be^{-x}$, où B est une constante. Les solutions cherchées sont donc de la forme
$$y(x) = A(x-1) + Be^{-x}\,.$$

Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle
$$x^2y'' - x(x+6)y' + 3(x+4)y = 0\,.$$

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

On a donc
$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}\,.$$
Posons
$$\mathscr{E}(x) = x^2 y''(x) - x(x+6)y'(x) + 3(x+4)y(x)\,.$$
On a alors
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} 6na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 12a_n x^n\,,$$
ou encore
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 6na_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 12a_n x^n\,.$$
On a donc
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1) - 6n + 12]a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty}[-n+1+3]a_{n-1} x^n\,.$$
Finalement
$$\mathscr{E}(x) = 12a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n-3)(n-4)a_n - (n-4)a_{n-1}]\, x^n\,.$$
Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc, $a_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geq 1$,
$$(n-3)(n-4)a_n - (n-4)a_{n-1} = 0\,.$$
L'égalité est vraie si $n = 4$. Dans le cas contraire on peut simplifier par $n-4$ et on obtient
$$(n-3)a_n = a_{n-1}\,.$$
En particulier, pour les valeurs de n comprises entre 1 et 3, on obtient
$$-2a_1 = a_0\,,\ \ -a_2 = a_1\,,\ \ 0 = a_2\,,$$
donc $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, et si $n \geq 5$
$$(\star) \qquad a_n = \frac{a_{n-1}}{n-3}\,.$$
Tous les coefficients se calculent en fonction de a_4 et ils ne sont pas nuls si $a_4 \neq 0$. Donc si R est le rayon de convergence de la série,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}(n-3) = +\infty = R\,.$$
La série obtenue est de rayon infini, et les calculs précédents sont valables dans $\mathbb{R}$ tout entier. De la relation $(\star)$ on tire immédiatement par récurrence que, si $n \geq 4$,
$$a_n = \frac{1}{n-3}\,\frac{1}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\,a_4 = \frac{a_4}{(n-3)!}\,.$$

et finalement

$$y(x) = a_3x^3 + a_4 \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{(n-3)!}\,.$$

Mais

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{(n-3)!} = x^3 \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} = x^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x^3(e^x - 1)\,.$$

Finalement

$$y(x) = a_3x^3 + a_4\, x^3(e^x - 1)\,.$$

> Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle
> $$x^2y'' - x(x+4)y' + 2(x+3)y = 0\,.$$

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\,.$$

On a donc

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}\,.$$

Posons

$$\mathscr{E}(x) = x^2y''(x) - x(x+4)y'(x) + 2(x+3)y(x)\,.$$

On a alors

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^n - \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} 4na_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_nx^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_nx^n\,,$$

ou encore

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4na_nx^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_nx^n\,.$$

On a donc

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1) - 4n + 6]a_nx^n + \sum_{n=1}^{\infty}[-n+1+2]a_{n-1}x^n\,.$$

Finalement

$$\mathscr{E}(x) = 6a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n-3)(n-2)a_n - (n-3)a_{n-1}]\,x^n\,.$$

Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc, $a_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geq 1$,

$$(n-3)(n-2)a_n - (n-3)a_{n-1} = 0\,.$$

L'égalité est vraie si $n = 3$. Dans le cas contraire on peut simplifier par $n - 3$ et on obtient

$$(n-2)a_n = a_{n-1}\,.$$

En particulier, pour les valeurs de n comprises entre 1 et 2, on obtient

$$-a_1 = a_0\,,\ \ 0 = a_1\,,$$

donc $a_0 = a_1 = 0$, et si $n \geq 4$

$$(\star) \qquad a_n = \frac{a_{n-1}}{n-2}\,.$$

Tous les coefficients se calculent en fonction de a_3 et ils ne sont pas nuls si $a_3 \neq 0$. Donc si R est le rayon de convergence de la série,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} (n-2) = +\infty = R\,.$$

La série obtenue est de rayon infini, et les calculs précédents sont valables dans $\mathbb{R}$ tout entier. De la relation $(\star)$ on tire immédiatement par récurrence que, si $n \geq 3$,

$$a_n = \frac{1}{n-2}\,\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{2}\,a_3 = \frac{a_3}{(n-2)!}\,.$$

et finalement

$$y(x) = a_3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!}\,.$$

Mais

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} = x^2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x^2(e^x - 1)\,.$$

Finalement

$$y(x) = a_3\, x^2(e^x - 1)\,.$$

Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle

$$x^2(1+x)y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0\,.$$

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

On a donc

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\,.$$

Posons

$$\mathscr{E}(x) = x^2(1+x)y''(x) - x(x+2)y'(x) + (x+2)y(x)\,.$$

On a alors

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n\,,$$

ou encore

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n\,.$$

On a donc

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1) - 2n + 2] a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} [(n-1)(n-2) - (n-1) + 1] a_{n-1} x^n\,.$$

Finalement

$$\mathscr{E}(x) = 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n-2)(n-1)a_n + (n-2)^2 a_{n-1}\right] x^n\,.$$

Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc, $a_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geq 1$,

$$(n-2)(n-1)a_n + (n-2)^2 a_{n-1} = 0\,.$$

L'égalité est vraie si $n = 2$. Dans le cas contraire on peut simplifier par $n-2$ et on obtient

$$(n-1)a_n + (n-2)a_{n-1} = 0\,.$$

Si $n = 1$, on retrouve $a_0 = 0$, et si $n \geq 3$

$$(\star) \qquad a_n = -\frac{n-2}{n-1}\, a_{n-1}\,.$$

Tous les coefficients se calculent en fonction de a_2 et ils ne sont pas nuls si $a_2 \neq 0$. Donc si R est le rayon de convergence de la série,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n-2} = 1 = R\,.$$

La série obtenue est de rayon 1, et les calculs précédents sont valables dans l'intervalle $]-1,\,1[$.
De la relation $(\star)$ on tire immédiatement par récurrence que, si $n \geq 2$,

$$a_n = (-1)^n \frac{n-2}{n-1}\,\frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2}\,a_2 = (-1)^n \frac{a_2}{n-1}\,.$$

et finalement

$$y(x) = a_2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n-1}\,.$$

Mais

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n-1} = x \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} = x \ln(1+x)\,.$$

Finalement, si x appartient à l'intervalle $]-1,\,1[$,

$$y(x) = a_2 x \ln(1+x)\,.$$

Mais on remarquera que la fonction obtenue dans ce dernier cas se prolonge sur $]-1,\,+\infty[$ et vérifie sur cet intervalle l'équation différentielle donnée.

Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle

$$(x^2+x)y'' + (x-2)y' - 4y = 0\,.$$

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

On a donc

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\,.$$

Posons

$$\mathscr{E}(x) = (x^2+x)y''(x) + (x-2)y'(x) - 4y(x)\,.$$

On a alors

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 4 a_n x^n\,,$$

ou encore

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4 a_n x^n\,.$$

Finalement
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n-2)a_{n+1} + (n^2-4)a_n]\, x^n \,.$$
Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc, pour tout entier $n \geq 0$,
$$(n+1)(n-2)a_{n+1} + (n^2-4)a_n = 0 \,.$$
L'égalité est vraie si $n = 2$. Dans le cas contraire on peut simplifier par $n-2$ et on obtient
$$(n+1)a_{n+1} + (n+2)a_n = 0 \,.$$
En particulier
$$a_1 + 2a_0 = 0 \quad \text{et} \quad 2a_2 + 3a_1 = 0 \,,$$
donc
$$a_1 = -2a_0 \quad \text{et} \quad a_2 = 3a_0 \,,$$
et si $n \geq 3$

$$(\star) \qquad a_{n+1} = -\frac{n+2}{n+1}\, a_n \,.$$

Tous les coefficients se calculent en fonction de a_3 et ils ne sont pas nuls si $a_3 \neq 0$. Donc si R est le rayon de convergence de la série,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 = R \,.$$
La série obtenue est de rayon 1, et les calculs précédents sont valables dans l'intervalle $\,]-1,\,1\,[\,$. De la relation $(\star)$ on tire immédiatement par récurrence que, si $n \geq 3$,
$$a_n = (-1)^{n-3}\, \frac{n+1}{n}\, \frac{n}{n-1} \cdots \frac{5}{4}\, a_3 = (-1)^{n+1}\, \frac{n+1}{4}\, a_3 \,.$$
et finalement
$$y(x) = a_0 - 2a_0x + 3a_0x^2 + \frac{a_3}{4} \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)\, x^n \,.$$
Mais
$$u(x) = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)\, x^n \,,$$
est la dérivée de
$$\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\, x^{n+1} = \sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n\, x^n = \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 + x^3 \,,$$
donc
$$u(x) = 1 - 2x + 3x^2 - \frac{1}{(1+x)^2} \,.$$

Finalement
$$y(x) = \left(a_0 + \frac{a_3}{4}\right)(1 - 2x + 3x^2) + \frac{a_3}{4}\,\frac{1}{(1+x)^2}\,,$$
où, en posant
$$A = a_0 + \frac{a_3}{4} \quad \text{et} \quad B = \frac{a_3}{4}\,,$$
$$y(x) = A(1 - 2x + 3x^2) + \frac{B}{(1+x)^2}\,.$$
Cette série est de rayon infini si $a_3 = 0$ (c'est un polynôme), et de rayon 1 sinon. Mais on remarquera que la fonction obtenue dans ce dernier cas se prolonge sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, et vérifie sur cet ensemble l'équation différentielle donnée.

Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle
$$x^2(1-x)y'' - x(x+1)y' + y = 0\,,$$
puis résoudre complètement l'équation.

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$
On a donc
$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\,.$$
Posons
$$\mathscr{E}(x) = x^2(1-x)y''(x) - x(x+1)y'(x) + y(x)\,.$$
On a alors
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,,$$
ou encore
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$
On a donc
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)^2 a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)^2 a_{n-1} x^n\,.$$

Finalement
$$\mathscr{E}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)^2(a_n - a_{n-1})\,x^n\,.$$
Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc $a_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 1$,
$$(n-1)^2(a_n - a_{n-1}) = 0\,.$$
L'égalité est vraie si $n = 1$, et pour $n \geq 2$
$$a_n = a_{n-1}\,.$$
Tous les coefficients se calculent en fonction de a_1 et ils ne sont pas nuls si $a_1 \neq 0$. Donc si R est le rayon de convergence de la série,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1 = R\,.$$
La série obtenue est de rayon 1, et les calculs précédents sont valables dans l'intervalle $]-1,\,1[$. On a alors
$$y(x) = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} x^n = a_1\,\frac{x}{1-x}\,.$$
Cette solution est obtenue dans l'intervalle $]-1,\,1[$, mais on remarquera que la fonction obtenue se prolonge sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, et vérifie sur cet ensemble l'équation différentielle donnée.

Pour résoudre complètement l'équation, on peut utiliser le procédé de variation de la constante. Notons
$$y_0(x) = \frac{x}{1-x} \quad \text{donc} \quad y_0'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\,.$$
On cherche une solution de l'équation différentielle de la forme
$$y(x) = a(x)y_0(x)\,.$$
On a donc
$$y'(x) = a'(x)y_0(x) + a(x)y_0'(x) \quad \text{et} \quad y''(x) = a''(x)y_0(x) + 2a'(x)y_0'(x) + a(x)y_0''(x)\,.$$
En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient
$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(x) &= x^2(1-x)(a''(x)y_0(x) + 2a'(x)y_0'(x)) + a(x)y_0''(x)) \\
&\qquad\qquad -x(x+1)(a'(x)y_0(x) + a(x)y_0'(x)) + a(x)y_0(x) \\
&= a''(x)x^2(1-x)y_0(x) + a'(x)(2x^2(1-x)y_0'(x) - x(x+1)y_0(x)) \\
&= x^3a''(x) + a'(x)\left(2x^2(1-x)\,\frac{1}{(1-x)^2} - x(x+1)\frac{x}{1-x}\right) \\
&= x^3a''(x) + x^2a'(x)\,.
\end{aligned}$$
Donc, pour x non nul, on a
$$xa''(x) + a'(x) = 0\,.$$

On en déduit successivement que

$$a'(x) = \frac{A}{x}\,,$$

où A est une constante, puis que

$$a(x) = A\ln|x| + B\,,$$

où B est une autre constante. Finalement, pour x différent de 0 et de 1,

$$y(x) = (A\ln|x| + B)\,\frac{x}{1-x}\,.$$

Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle

$$(x^2+x)y'' + (3x+1)y' + y = \frac{1+x}{(1-x)^3}\,.$$

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

On a donc

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}\,.$$

Posons

$$\mathscr{E}(x) = (x^2+x)y''(x) + (3x+1)y'(x) + y(x)\,.$$

On a alors

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 3na_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,,$$

ou encore

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

Finalement

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 (a_{n+1} + a_n)\, x^n\,.$$

Décomposons le second membre de l'équation différentielle en série entière de rayon 1. En partant de

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,,$$

on obtient en dérivant
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\,,$$
puis
$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n\,,$$
donc
$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n\,.$$
L'égalité des séries entières est équivalente à celle de leurs coefficients. Donc, on doit avoir pour tout $n\geq 0$,
$$(n+1)^2(a_{n+1}+a_n) = (n+1)^2\,,$$
soit
$$a_{n+1}+a_n = 1\,.$$
On a donc aussi, pour tout $n\geq 1$
$$a_n + a_{n-1} = 1\,,$$
et par soustraction
$$a_{n+1} - a_{n-1} = 0\,.$$
Il en résulte que l'on a pour tout entier $p\geq 0$
$$a_{2p} = a_0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = a_1 = 1 - a_0\,.$$
Réciproquement, ces égalités impliquent bien que, pour tout $n\geq 0$,
$$a_{n+1}+a_n = 1\,.$$
Finalement
$$y(x) = a_0\sum_{p=0}^{\infty} x^{2p} + (1-a_0)\sum_{p=0}^{\infty} x^{2p+1}\,,$$
ce qui donne
$$y(x) = \frac{a_0}{1-x^2} + \frac{(1-a_0)x}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} + \frac{a_0}{1+x}\,.$$
Toutes les séries entières obtenues sont de rayon 1. Les solutions sont donc définies dans $]-1,\,1[$. Mais la fonction y se prolonge à $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, et vérifie sur cet ensemble l'équation différentielle donnée.

Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle
$$x^4y'' - 2xy' + 6y = a(x)\,,$$
avec successivement $a(x) = 6+2x^2$ et $a(x) = 4x$.

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

On a donc

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} .$$

Posons

$$\mathscr{E}(x) = x^4 y''(x) - 2xy'(x) + 6y(x) .$$

On a alors

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n+2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6 a_n x^n ,$$

ou encore

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6 a_n x^n .$$

On a donc

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (6-2n) a_n x^n ,$$

et finalement

$$\mathscr{E}(x) = 6a_0 + 4a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n-2)(n-3)a_{n-2} + 2(3-n)a_n]\, x^n .$$

Pour la première équation différentielle,

$$\mathscr{E}(x) = 6 + 2x^2 ,$$

l'égalité des séries entières est équivalente à celle de leurs coefficients. Donc, on doit avoir

$$6a_0 = 6 \quad , \quad 4a_1 = 0 \quad , \quad 2a_2 = 2 ,$$

et, pour tout $n \geq 3$,

$$(n-2)(n-3)a_{n-2} + 2(3-n)a_n = 0 .$$

L'égalité est vraie si $n = 3$, et, pour $n \geq 4$, si

$$(\star) \qquad a_n = \frac{n-2}{2}\, a_{n-2} .$$

Comme $a_2 = 1$ n'est pas nul, il résulte de la relation $(\star)$, qu'aucun des coefficients de rang pair n'est nul mais alors

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{|a_{2p-2}|}{|a_{2p}|} = \lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p-1} = 0 .$$

La série des termes de rang pair a un rayon de convergence nul. Il n'existe donc pas de série entière vérifiant l'équation différentielle proposée.

Pour la seconde équation
$$\mathscr{E}(x) = 4x\,,$$
on a cette fois
$$a_0 = 0 \quad , \quad 4a_1 = 4 \quad , \quad 2a_2 = 0\,,$$
et, pour tout $n \geq 3$,
$$(n-2)(n-3)a_{n-2} + 2(3-n)a_n = 0\,.$$
L'égalité est encore vraie si $n = 3$, et, pour $n \geq 4$, si

$$(\star) \qquad a_n = \frac{n-2}{2}\,a_{n-2}\,.$$

Tous les coefficients de rang pair sont nuls. Si a_3 n'était pas nul, alors les coefficients de rang impair ne seraient pas nuls et
$$\lim_{p\to+\infty} \frac{|a_{2p-1}|}{|a_{2p+1}|} = \lim_{p\to+\infty} \frac{2}{2p-1} = 0\,.$$
La série des termes de rang impair aurait un rayon de convergence nul ce qui n'est pas possible. Donc nécessairement $a_3 = 0$ et
$$y(x) = x$$
est la seule série entière solution de l'équation proposée.

Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle
$$(1-x^2)y'' - xy' + y = 0\,.$$

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$
On a donc
$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}\,.$$
Posons
$$\mathscr{E}(x) = (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x)\,.$$
On a alors
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,,$$

ou encore

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

Finalement

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2-1)a_n]\, x^n\,.$$

Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc, pour tout entier $n \geq 0$,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2-1)a_n = 0\,,$$

ou encore, en simplifiant par $n+1$

$$(n+2)a_{n+2} - (n-1)a_n = 0\,.$$

En particulier, si $n = 1$, on en tire $a_3 = 0$, et tous les coefficients de rang impair supérieur à 3 seront nuls également. On a donc comme partie impaire de la série

$$y_I(x) = a_1 x\,.$$

Pour les coefficients de rang pair, on a, si $p \geq 0$,

$$(\star) \qquad a_{2p+2} = \frac{2p-1}{2p+2}\, a_{2p}\,.$$

Tous les coefficients se calculent en fonction de a_0 et ils ne sont pas nuls si $a_0 \neq 0$. Donc si R est le rayon de convergence de la série des termes de rang pair,

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{|a_{2p}|}{|a_{2p+2}|} = \lim_{p\to+\infty} \frac{2p+2}{2p-1} = 1 = R^2\,.$$

La série obtenue est de rayon 1, et les calculs précédents sont valables dans l'intervalle $]-1,\,1[$. De la relation $(\star)$ on tire immédiatement par récurrence, que, pour $p \geq 0$, on a

$$a_{2p} = \frac{2p-3}{2p}\,\frac{2p-5}{2p-2}\cdots\frac{1}{4}\,\frac{-1}{2}\,a_0 = \frac{(-1)^p}{p!}\,\frac{3-2p}{2}\,\frac{5-2p}{2}\cdots\frac{-1}{2}\,\frac{1}{2}\,a_0\,,$$

ce que l'on peut écrire

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{p!}\left(\frac{1}{2}-p+1\right)\left(\frac{1}{2}-p+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{1}{2}\,a_0\,.$$

Alors

$$y_P(x) = a_0\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}(-1)^p\left(\frac{1}{2}-p+1\right)\left(\frac{1}{2}-p+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{1}{2}\,x^{2p} = \sqrt{1-x^2}\,.$$

Finalement

$$y(x) = a_1 x + a_0\sqrt{1-x^2}\,.$$

Cette série est de rayon infini si $a_0 = 0$ (c'est un polynôme), et de rayon 1 sinon.

> Soit b un nombre réel non nul. Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle
> $$(x^2 - b)y'' + xy' - 4y = 0\,.$$

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$
On a donc
$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\,.$$
Posons
$$\mathscr{E}(x) = (x^2 - b)y''(x) + xy'(x) - 4y(x)\,.$$
On a alors
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} bn(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n\,,$$
ou encore
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b(n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n\,.$$
Finalement
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [-b(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2-4)a_n]\, x^n\,.$$
Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc, pour tout entier $n \geq 0$,
$$-b(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2-4)a_n = 0\,,$$
ou encore, en simplifiant par $n+2$
$$-b(n+1)a_{n+2} + (n-2)a_n = 0\,.$$
En particulier, si $n = 2$, on en tire $a_4 = 0$, et tous les coefficients de rang pair supérieur à 4 seront nuls également. On a alors
$$-ba_2 - 2a_0 = 0\,,$$
donc
$$a_2 = -\frac{2a_0}{b}\,,$$

et l'on a comme partie paire de la série

$$y_P(x) = a_0\left(1 - \frac{2}{b}\,x^2\right).$$

Pour les coefficients de rang impair, on a, si $p \geq 0$,

$$(\star) \qquad a_{2p+1} = \frac{2p-3}{2pb}\,a_{2p-1}\,.$$

Tous les coefficients se calculent en fonction de a_1 et ils ne sont pas nuls si $a_1 \neq 0$. Donc si R est le rayon de convergence de la série des termes de rang impair,

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{|a_{2p-1}|}{|a_{2p+1}|} = \lim_{p\to+\infty} \frac{2p|b|}{2p-3} = |b| = R^2\,.$$

La série obtenue est de rayon $\sqrt{|b|}$, et les calculs précédents sont valables dans l'intervalle $]-\sqrt{|b|},\ \sqrt{|b|}\,[$. De la relation $(\star)$ on tire immédiatement par récurrence, si $p \geq 0$, que

$$a_{2p+1} = \frac{1}{b^p}\,\frac{2p-3}{2p}\,\frac{2p-5}{2p-2}\cdots\frac{1}{4}\,\frac{-1}{2}\,a_1 = \frac{1}{b^p}\,\frac{(-1)^p}{p!}\,\frac{3-2p}{2}\,\frac{5-2p}{2}\cdots\frac{-1}{2}\,\frac{1}{2}\,a_1\,,$$

ce que l'on peut écrire

$$a_{2p} = \frac{1}{b^p}\,\frac{1}{p!}\left(\frac{1}{2}-p+1\right)\left(\frac{1}{2}-p+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{1}{2}\,a_1\,.$$

Alors

$$y_P(x) = a_1 x\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\left(\frac{1}{2}-p+1\right)\left(\frac{1}{2}-p+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{b}\right)^p = a_1 x\sqrt{1-\frac{x^2}{b}}\,.$$

Finalement

$$y(x) = a_0\left(1-\frac{2}{b}\,x^2\right) + a_1 x\sqrt{1-\frac{x^2}{b}}\,.$$

Cette série est de rayon infini si $a_1 = 0$ (c'est un polynôme), et de rayon $\sqrt{|b|}$ sinon.

Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle

$$xy'' + 2(x^2+1)y' + 6xy = 0\,.$$

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

On a donc

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\,.$$

Posons

$$\mathscr{E}(x) = xy''(x) + 2(x^2+1)y'(x) + 6xy(x)\,.$$

On a alors

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n x^{n+1}\,,$$

ou encore

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1)a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 6a_{n-1} x^n\,.$$

On en déduit

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+2)a_{n-1} x^n\,.$$

Finalement

$$\mathscr{E}(x) = 2a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+1} + 2(n+2)a_{n-1}\right] x^n\,.$$

Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc $a_1 = 0$, et pour tout entier $n \geq 1$,

$$(n+2)(n+1)a_{n+1} + 2(n+2)a_{n-1} = 0\,,$$

ou encore, en simplifiant par $n+2$

$$(n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} = 0\,.$$

Il résulte de cette formule en particulier que tous les coefficients de rang impair seront nuls. Pour les coefficients de rang pair, on a, si $p \geq 1$,

$$(\star) \qquad a_{2p} = -\frac{1}{p}\, a_{2p-2}\,.$$

Tous les coefficients se calculent en fonction de a_0 et ils ne sont pas nuls si $a_0 \neq 0$. Donc si R est le rayon de convergence de la série des termes de rang pair,

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{|a_{2p-2}|}{|a_{2p}|} = \lim_{p \to +\infty} p = +\infty = R^2\,.$$

La série obtenue est de rayon infini, et les calculs précédents sont valables dans $\mathbb{R}$ tout entier. De la relation $(\star)$ on tire immédiatement par récurrence

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{p!}\, a_0.$$

Alors
$$y(x) = a_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!}\, x^{2p} = a_0 e^{-x^2}\,.$$

Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle $$xy'' - 2y' + xy = 0\,.$$

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$
On a donc
$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\,.$$
Posons
$$\mathscr{E}(x) = xy''(x) - 2y'(x) + xy(x)\,.$$
On a alors
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}\,,$$
ou encore
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n\,.$$
On en déduit
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n-2) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n\,.$$
Finalement
$$\mathscr{E}(x) = -2a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n-2)(n+1)a_{n+1} + a_{n-1}]\, x^n\,.$$
Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc $a_1 = 0$ et pour tout entier $n \geq 1$,
$$(n-2)(n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0\,.$$
Si $n = 2$, on retrouve $a_1 = 0$. Les coefficients de rang impair vont se calculer en fonction de a_3 et ne seront pas nuls si $a_3 \neq 0$. On a si $p \geq 2$

$$(\star) \qquad a_{2p+1} = -\frac{a_{2p-1}}{(2p+1)(2p-2)}\,.$$

Donc si R est le rayon de convergence de la série des termes de rang impair,

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{|a_{2p-1}|}{|a_{2p+1}|}=\lim_{p\to+\infty}(2p-2)(2p+1)=+\infty=R^2\,.$$

La série obtenue est de rayon infini, et les calculs précédents sont valables dans $\mathbb{R}$ tout entier. De la relation $(\star)$ on tire immédiatement par récurrence, que, pour $p\geq 2$,

$$a_{2p+1}=(-1)^{p-1}\frac{1}{(2p+1)(2p-2)}\,\frac{1}{(2p-1)(2p-4)}\cdots\frac{1}{7.4}\,\frac{1}{5.2}\,a_3\,.$$

Au dénominateur de ce produit figurent tous les nombres entiers compris entre 2 et $2p+1$ sauf 3 et $2p$, donc, si $p\geq 1$,

$$a_{2p+1}=(-1)^{p+1}\frac{6p}{(2p+1)!}\,a_3\,.$$

On a donc comme partie impaire de la série

$$y_I(x)=3a_3\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}\frac{2p}{(2p+1)!}x^{2p+1}\,.$$

Pour calculer cette somme, on peut commencer la sommation à 0, et écrire $2p=(2p+1)-1$. On a alors

$$\begin{aligned}
y_I(x) &= 3a_3\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^{p+1}\frac{2p}{(2p+1)!}x^{2p+1}\\
&= 3a_3\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^{p+1}\frac{2p+1}{(2p+1)!}x^{2p+1}-3a_3\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^{p+1}\frac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1}\\
&= -3a_3x\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^{p}\frac{1}{(2p)!}x^{2p}+3a_3\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^{p}\frac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1}\\
&= 3a_3(-x\cos x+\sin x)\,.
\end{aligned}$$

La démarche est la même avec la partie paire. On a si $p\geq 1$

$$(\star\star)\qquad a_{2p}=-\frac{a_{2p-2}}{(2p)(2p-3)}\,.$$

On obtient là aussi une série de rayon infini et l'on a, si $p\geq 0$,

$$a_{2p}=(-1)^p\,\frac{1}{(2p)(2p-3)}\,\frac{1}{(2p-2)(2p-5)}\cdots\frac{1}{4\cdot 1}\,\frac{1}{2(-1)}\,a_0\,.$$

Au dénominateur de ce produit figurent tous les nombres entiers compris entre 1 et $2p$ sauf $2p-1$. Donc, si $p\geq 0$,

$$a_{2p}=(-1)^{p+1}\frac{2p-1}{(2p)!}\,a_0\,.$$

On a donc comme partie paire de la série

$$y_P(x) = a_0 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} \frac{2p-1}{(2p)!} x^{2p} .$$

On la calcule alors facilement

$$\begin{aligned} y_P(x) &= a_0 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} \frac{2p}{(2p)!} x^{2p} + a_0 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{(2p)!} x^{2p} \\ &= a_0 x \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} \frac{1}{(2p-1)!} x^{2p-1} + a_0 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{(2p)!} x^{2p} \\ &= a_0 (x \sin x + \cos x) . \end{aligned}$$

Finalement, pour tout x réel,

$$y(x) = a_0 (x \sin x + \cos x) + 3a_3 (\sin x - x \cos x) .$$

> Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle
> $$4xy'' + 2y' + y = 0 .$$

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

On a donc

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} .$$

Posons

$$\mathscr{E}(x) = 4xy''(x) + 2y'(x) + y(x) .$$

On a alors

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ,$$

ou encore

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4n(n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Finalement
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(4n+2)a_{n+1} + a_n]\, x^n \,.$$
Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc, pour tout entier $n \geq 0$,
$$(n+1)(4n+2)a_{n+1} + a_n = 0\,,$$
que l'on peut écrire
$$(2n+2)(2n+1)a_{n+1} + a_n = 0\,.$$
On a donc

$$(\star) \qquad a_{n+1} = -\frac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}\,.$$

Tous les coefficients se calculent en fonction de a_0 et ils ne sont pas nuls si $a_0 \neq 0$. Donc si R est le rayon de convergence de la série,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} (2n+2)(2n+1) = +\infty = R\,.$$
La série obtenue est de rayon infini, et les calculs précédents sont valables dans $\mathbb{R}$ tout entier. De la relation $(\star)$ on tire immédiatement par récurrence, que, pour $n \geq 0$,
$$a_n = (-1)^n \frac{1}{(2n)(2n-1)}\, \frac{1}{(2n-2)(2n-3)} \cdots \frac{1}{2.1}\, a_0 = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, a_0\,.$$
On a donc, pour tout x réel.
$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^n\,.$$
Pour calculer la somme on distingue suivant le signe de x.

Si $x \geq 0$
$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, (\sqrt{x})^{2n} = a_0 \cos\sqrt{x}\,,$$
et si $x \leq 0$
$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, (\sqrt{-x})^{2n} = a_0 \operatorname{ch}\sqrt{-x}\,.$$

Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle
$$xy'' + xy' + y = 1\,.$$

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,.$$

On a donc

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \,.$$

Posons

$$\mathscr{E}(x) = xy''(x) + xy'(x) + y(x) \,.$$

On a alors

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,,$$

ou encore

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,.$$

Finalement

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n] x^n \,.$$

L'équation devient donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n] x^n = 1 \,.$$

La série constante 1 ayant tous ses coefficients nuls sauf le premier qui vaut 1, on obtient en identifiant terme à terme, $a_0 = 1$, et pour tout $n \geq 1$,

$$n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n = 0 \,,$$

soit, puisque $n+1$ n'est pas nul,

$$(\star) \qquad a_{n+1} = -\frac{a_n}{n} \,.$$

Tous les coefficients autres que a_0 se calculent en fonction de a_1, et ils ne sont pas nuls si $a_1 \neq 0$. Donc si R est le rayon de convergence de la série,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty = R \,.$$

La série obtenue est de rayon infini et les calculs précédents sont valables dans $\mathbb{R}$ tout entier. De la relation $(\star)$ on tire immédiatement par récurrence, que, pour $n \geq 1$,

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{a_1}{(n-1)!} \,.$$

D'où

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_1}{(n-1)!} x^n \,,$$

ou encore en mettant xa_1 en facteur

$$y(x) = 1 + a_1 x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + a_1 x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \,,$$

ce qui donne finalement

$$y(x) = 1 + a_1 x e^{-x} \,.$$

Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'' - 2y = 0 \,,$$

puis celles de l'équation

$$(1+x^2)y'' - 2y = x \,,$$

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,.$$

On a donc

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \,.$$

Posons

$$\mathscr{E}(x) = (1+x^2)y''(x) - 2y(x) \,.$$

On a alors

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n \,,$$

ou encore

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n \,.$$

Finalement

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n-2)(n+1) a_n\right] x^n \,.$$

Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc, pour tout entier $n \geq 0$,

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n-2)(n+1) a_n = 0 \,,$$

et en simplifiant par $n+1$

$$(n+2)a_{n+2} + (n-2)a_n = 0\,.$$

Si $n = 2$, on trouve $a_4 = 0$, et par récurrence, tous les termes de rang pair supérieur à 4 sont nuls. On a aussi $2a_2 - 2a_0 = 0$. Donc la partie paire vaut

$$y_P(x) = a_0(1+x^2)\,.$$

Pour les coefficients de rang impair, on a, si $p \geq 0$,

$$(\star) \qquad a_{2p+1} = -\frac{2p-3}{2p+1}\, a_{2p-1}\,.$$

Tous les coefficients se calculent en fonction de a_1 et ils ne sont pas nuls si $a_1 \neq 0$. Donc si R est le rayon de convergence de la série,

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{|a_{2p-1}|}{|a_{2p+1}|} = \lim_{p\to+\infty} \frac{2p+1}{2p-3} = 1 = R^2\,.$$

La série obtenue est de rayon 1, et les calculs précédents sont valables dans l'intervalle $\,]-1,\,1[\,$. De la relation $(\star)$ on tire immédiatement par récurrence, que, si $p \geq 0$, on a

$$a_{2p+1} = (-1)^p\, \frac{2p-3}{2p+1}\, \frac{2p-5}{2p-1} \cdots \frac{1}{5}\, \frac{-1}{3}\, a_1\,.$$

Tous les termes se simplifient sauf $(2p+1)(2p-1)$ et -1 . On obtient, si $p \geq 0$,

$$a_{2p+1} = (-1)^{p+1}\, \frac{1}{(2p+1)(2p-1)}\, a_1\,,$$

et finalement

$$y_I(x) = a_1 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1}\, \frac{1}{(2p+1)(2p-1)}\, x^{2p+1}\,.$$

Pour calculer cette somme, on décompose la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(2p+1)(2p-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p+1}\right)\,,$$

d'où, si $-1 < x < 1$,

$$\begin{aligned}
y_I(x) &= \frac{a_1}{2}\left(\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^{p+1}\,\frac{1}{2p-1}\,x^{2p+1} - \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^{p+1}\,\frac{1}{2p+1}\,x^{2p+1}\right)\\
&= \frac{a_1}{2}\left(x + x^2\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}\,\frac{1}{2p-1}\,x^{2p-1} + \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^{p}\,\frac{1}{2p+1}\,x^{2p+1}\right)\\
&= \frac{a_1}{2}(x + x^2 \arctan x + \arctan x)\,.
\end{aligned}$$

Finalement
$$y(x) = (1+x^2)a_0 + \frac{a_1}{2}(x + x^2 \arctan x + \arctan x)\,.$$
Pour résoudre l'équation
$$(1+x^2)y'' - 2y = x\,,$$
on constate qu'elle a comme solution particulière la fonction y_0 définie par
$$y_0(x) = -\frac{x}{2}\,.$$
Il suffit donc d'ajouter cette solution à celles de l'équation homogène pour obtenir
$$y(x) = -\frac{x}{2} + (1+x^2)a_0 + \frac{a_1}{2}(x + x^2 \arctan x + \arctan x)\,.$$
Pour les deux équations, la solution est obtenue dans l'intervalle $]-1,\,1[$, (si $a_1 \neq 0$), mais on remarquera qu'elle se prolonge sur $\mathbb{R}$ tout entier, et vérifie partout l'équation différentielle donnée.

Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle
$$(2+x^2)y'' - xy' + y = 0\,.$$

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$
On a donc
$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\,.$$
Posons
$$\mathscr{E}(x) = (2+x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x)\,.$$
On a alors
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,,$$
ou encore
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$
Finalement
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-1)^2 a_n]\, x^n\,.$$

Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc, pour tout entier $n \geq 0$,

$$2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-1)^2 a_n = 0\,.$$

En particulier, si $n = 1$, on en tire $a_3 = 0$, et tous les coefficients de rang impair supérieur à 3 seront nuls également. On a donc comme partie impaire de la série

$$y_I(x) = a_1 x\,.$$

Pour les coefficients de rang pair, on a, si $p \geq 0$,

$$(\star) \qquad a_{2p+2} = -\frac{(2p-1)^2}{4(p+1)(2p+1)}\, a_{2p}\,.$$

Tous les coefficients se calculent en fonction de a_0 et ils ne sont pas nuls si $a_0 \neq 0$. Donc si R est le rayon de convergence de la série des termes de rang pair,

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{|a_{2p}|}{|a_{2p+2}|} = \lim_{p\to+\infty} \frac{2(2p+2)(2p+1)}{(2p-1)^2} = 2 = R^2\,.$$

La série obtenue est de rayon $\sqrt{2}$, et les calculs précédents sont valables dans l'intervalle $]-\sqrt{2},\, \sqrt{2}\,[$. De la relation $(\star)$ on tire immédiatement par récurrence, que, pour $p \geq 0$, on a

$$a_{2p} = (-1)^p \frac{(2p-3)^2}{4p(2p-1)} \frac{(2p-5)^2}{4(p-1)(2p-3)} \cdots \frac{1}{4.2.3} \frac{1}{4.1.1}\, a_0\,.$$

ce que l'on peut écrire, après simplification et mise en facteur,

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \frac{(2p-3)(2p-5)\cdots 1}{p!(2p-1)}\, a_0\,,$$

ou encore

$$a_{2p} = -\frac{1}{2^p p!(2p-1)} \left(\frac{1}{2} - p + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{1}{2}\, a_0\,.$$

Alors

$$y_P(x) = a_0 - a_0 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p p!(2p-1)} \left(\frac{1}{2} - p + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{1}{2}\, x^{2p}\,.$$

Reste à calculer la somme de cette série. Si x appartient à $]-\sqrt{2},\, \sqrt{2}\,[\setminus\{0\}$ posons

$$z(x) = \frac{y_P(x) - a_0}{x}\,.$$

(Cette fonction est impaire et se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0. Elle est définie sur $]-\sqrt{2},\, \sqrt{2}\,[$).

On a

$$z(x) = -a_0 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p p!(2p-1)} \left(\frac{1}{2} - p + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{1}{2}\, x^{2p-1}\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned} z'(x) &= -a_0 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p p!} \left(\frac{1}{2} - p + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{1}{2} x^{2p-2} \\ &= -\frac{a_0}{x^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p p!} \left(\frac{1}{2} - p + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{1}{2} x^{2p} \\ &= -\frac{a_0}{x^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{1}{2} - p + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2}\right)^p \\ &= -\frac{a_0}{x^2} \left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{2}} - 1\right) . \end{aligned}$$

Donc, pour x non nul dans l'intervalle $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,[$, on a

$$z'(x) = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}\right) a_0 \,.$$

Il reste à trouver la primitive de z nulle en 0.

En effectuant le changement de variable $x = \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\, t$ qui est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, on a

$$t = \mathrm{argsh}\, \frac{x}{\sqrt{2}} = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}\right) = \ln(x + \sqrt{2 + x^2}) - \frac{1}{2} \ln 2\,.$$

On a alors

$$dx = \sqrt{2}\,\mathrm{ch}\, t dt\,.$$

D'autre part

$$1 + \frac{x^2}{2} = 1 + \mathrm{sh}^2 t = \mathrm{ch}^2 t\,,$$

et comme $\mathrm{ch}\, t$ est positif

$$\sqrt{1 + \frac{x^2}{2}} = \mathrm{ch}\, t\,.$$

Alors

$$\int \frac{\sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}}{x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{ch}^2 t}{\mathrm{sh}^2 t}\, dt\,.$$

En remarquant que

$$\left(\frac{\mathrm{ch}\, t}{\mathrm{sh}\, t}\right)' = \frac{\mathrm{sh}^2 t - \mathrm{ch}^2 t}{\mathrm{sh}^2 t} = 1 - \frac{\mathrm{ch}^2 t}{\mathrm{sh}^2 t}\,,$$

on en déduit

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{ch}^2 t}{\mathrm{sh}^2 t} dt\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t - \frac{\mathrm{ch}\, t}{\mathrm{sh}\, t}\right)\,,$$

d'où

$$\int \frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}}{x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln(x+\sqrt{2+x^2}) - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}}{\frac{x}{\sqrt{2}}}\right).$$

Finalement

$$z(x) = \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(x+\sqrt{2+x^2}) + \frac{1}{\sqrt{2}\,x}\sqrt{2+x^2} + K\right) a_0\,,$$

où K est une constante dont la valeur est déterminée par le fait que z se prolonge par 0 en 0. Cette constante vaut

$$K = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(x+\sqrt{2+x^2}) - \frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}-1}{x}\right] = \frac{\ln\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,.$$

Alors

$$y_P(x) = xz(x) + a_0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,x\ln(x+\sqrt{2+x^2}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+x^2} + Kx\right) a_0\,.$$

et

$$y(x) = \left(-x\ln(x+\sqrt{2+x^2}) + \sqrt{2+x^2}\right)\frac{a_0}{\sqrt{2}} + (Ka_0 + a_1)x\,.$$

Donc, si l'on pose,

$$A = \frac{a_0}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad B = a_1 + Ka_0\,,$$

on trouve

$$y(x) = A\left(-x\ln(x+\sqrt{2+x^2}) + \sqrt{2+x^2}\right) + Bx\,.$$

Soit a un nombre réel non nul. Déterminer la série entière y solution de l'équation différentielle

$$xy'' + y' - xy = a\,,$$

et vérifiant la condition $y(0) = 0$.

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

On a donc

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}\,.$$

Posons

$$\mathscr{E}(x) = xy''(x) + y'(x) - xy(x)\,.$$

On a alors

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1},$$

ou encore

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_{n+1} x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n}.$$

On en déduit

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 a_{n+1} x^{n} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n}.$$

Finalement

$$\mathscr{E}(x) = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)^2 a_{n+1} - a_{n-1}\right] x^{n}.$$

Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ doit être la constante a, on doit avoir $a_1 = a$, et les autres coefficients sont nuls, pour tout entier $n \geq 1$, donc

$$(n+1)^2 a_{n+1} - a_{n-1} = 0.$$

Comme $y(0) = a_0 = 0$, tous les coefficients de rang pair sont nuls. Les coefficients de rang impair vont se calculer en fonction de $a_1 = a$ et ne seront pas nuls. On a si $p \geq 1$

$$(\star) \qquad a_{2p+1} = \frac{a_{2p-1}}{(2p+1)^2}.$$

Donc si R est le rayon de convergence de la série,

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{|a_{2p-1}|}{|a_{2p+1}|} = \lim_{p\to+\infty} (2p+1)^2 = +\infty = R^2.$$

La série obtenue est de rayon infini, et les calculs précédents sont valables dans $\mathbb{R}$ tout entier. De la relation $(\star)$ on tire immédiatement par récurrence, que, pour $p \geq 2$,

$$a_{2p+1} = \frac{1}{(2p+1)^2} \frac{1}{(2p-1)^2} \cdots \frac{1}{3^2} a_1.$$

Donc, si $p \geq 0$,

$$a_{2p+1} = \frac{a}{[(2p+1)(2p-1)\cdots 3]^2}.$$

Que l'on peut écrire en utilisant les factorielles

$$a_{2p+1} = a \frac{2^{2p}(p!)^2}{[(2p+1)!]^2}.$$

Finalement

$$y(x) = a \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^{2p}(p!)^2}{[(2p+1)!]^2} x^{2p+1}.$$

Chercher les fonctions y paires développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle
$$(1-x^2)y''-3xy'-y=0\,.$$
Puis en utilisant la méthode de variation de la constante, trouver les solutions impaires. En déduire, lorsqu'elle converge, la somme
$$S(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2p)(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3}\,x^{2p+1}\,.$$

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par
$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\,.$$
On a donc
$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\quad \text{et}\quad y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}\,.$$
Posons
$$\mathscr{E}(x)=(1-x^2)y''(x)-3xy'(x)-y(x)\,.$$
On a alors
$$\mathscr{E}(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}3na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\,,$$
ou encore
$$\mathscr{E}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}3na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$
Finalement
$$\mathscr{E}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)^2a_n]\,x^n\,.$$
Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc, pour tout entier $n\geq 0$,
$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)^2a_n=0\,,$$
ou en simplifiant
$$(n+2)a_{n+2}-(n+1)a_n=0\,.$$
Cherchons les solutions paires. On a, si $p\geq 0$,
$$(\star)\qquad a_{2p+2}=\frac{2p+1}{2p+2}\,a_{2p}\,.$$

Tous les coefficients se calculent en fonction de a_0 et ils ne sont pas nuls si $a_0 \neq 0$. Donc si R est le rayon de convergence de la série des termes de rang pair,

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{|a_{2p}|}{|a_{2p+2}|} = \lim_{p\to+\infty} \frac{2p+2}{2p+1} = 1 = R^2\,.$$

La série obtenue est de rayon 1, et les calculs précédents sont valables dans l'intervalle $]-1,\, 1[$. De la relation $(\star)$ on tire immédiatement par récurrence, que, pour $p \geq 0$, on a

$$a_{2p} = \frac{2p-1}{2p}\,\frac{2p-3}{2p-2}\cdots\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,a_0\,,$$

ce que l'on peut écrire,

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{p!}\left(-\frac{1}{2}-p+1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)a_0\,.$$

Alors

$$y_P(x) = a_0\sum_{p=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}-p+1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)x^{2p}\,.$$

Finalement, pour x dans $]-1,\, 1[$,

$$y_P(x) = \frac{a_0}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Pour la partie impaire, on a, si $p \geq 1$,

$$(\star\star) \qquad a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}\,a_{2p-1}\,.$$

La série est encore de rayon 1, et l'on a, si $p \geq 0$,

$$a_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3}\,a_1\,.$$

Donc

$$y_I(x) = a_1\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2p)(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3}\,x^{2p+1}\,.$$

Il en résulte que, si $|x| < 1$ et $a_1 = 1 = y_I'(0)$, on a

$$S(x) = y_I(x)\,.$$

On utilise le procédé de variation de la constante. Notons

$$y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{donc} \quad y_0'(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,.$$

On cherche une solution de l'équation différentielle de la forme

$$y(x) = a(x)y_0(x)\,.$$

On a donc

$$y'(x) = a'(x)y_0(x) + a(x)y_0'(x) \quad \text{et} \quad y''(x) = a''(x)y_0(x) + 2a'(x)y_0'(x) + a(x)y_0''(x)\,.$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{E}(x) & = & (1-x^2)(a''(x)y_0(x) + 2a'(x)y_0'(x)) - 3xa'(x)y_0(x) \\ & = & a''(x)(1-x^2)y_0(x) + a'(x)(2(1-x^2)y_0'(x) - 3xy_0(x)) \\ & = & \sqrt{1-x^2}\,a''(x) + a'(x)\left(\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\ & = & \sqrt{1-x^2}\,a''(x) - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}a'(x)\,. \end{array}$$

Donc, pour x non nul, on a

$$(1-x^2)a''(x) - xa'(x) = 0\,.$$

On résout cette équation en utilisant le procédé heuristique suivant :

on écrit

$$\frac{a''(x)}{a'(x)} = \frac{x}{1-x^2}\,,$$

et on en déduit successivement

$$\ln|a'(x)| = -\frac{1}{2}\,\ln(1-x^2) + K$$

où K est une constante, puis

$$a'(x) = \frac{A}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

où A est une constante, et enfin

$$a(x) = A\arcsin x + B\,,$$

où B est une autre constante. Finalement,

$$y_I(x) = \frac{A\arcsin x + B}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Comme on cherche la solution impaire, on a $B = 0$ et

$$y_I(x) = A\,\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

et comme

$$\lim_{x\to 0}\frac{y_I(x)}{x} = A = y_I'(0)\,,$$

on doit avoir $A = 1$. Finalement, pour x dans $]-1,\,1[$,

$$S(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

On considère les équations différentielles

(1) $$(1+x^2)y' - y = 0\,,$$

et

(2) $$(1-x^2)z' - iz = 0\,.$$

1) Soit y une solution de (1) développable en série entière sous la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

telle que $y(0) = 1$. Trouver une relation entre a_{n+1}, a_n et a_{n-1}, et montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$|a_n| \leq 1\,.$$

Qu'en déduit-on pour le rayon de convergence R de cette série ?

2) Soit z une solution de (2) développable en série entière sous la forme

$$z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

telle que $z(0) = 1$. Montrer que pour tout entier naturel n on a

$$b_n = i^n a_n\,.$$

Qu'en déduit-on pour le rayon de convergence R' de cette série ?

3) En résolvant directement les équations, calculer pour $|x| < R$ la somme des séries précédentes. Que vaut R ?

1) On a

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\,.$$

Posons

$$\mathscr{E}(x) = (1+x^2)y'(x) - y(x)\,.$$

On a alors
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,,$$
ou encore
$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$
Finalement
$$\mathscr{E}(x) = (a_1 - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} + (n-1)a_{n-1} - a_n]\, x^n \,.$$
Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc $a_0 - a_1 = 0$, et pour tout entier $n \geq 0$,
$$(n+1)a_{n+1} + (n-1)a_{n-1} - a_n = 0 \,,$$
ce que l'on peut écrire
$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\, a_n - \frac{n-1}{n+1}\, a_{n-1} \,.$$
Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, on a
$$|a_n| \leq 1 \,.$$
C'est vrai pour $n = 1$ et $n = 0$, puisque $a_1 = a_0 = 1$. Si l'on suppose la propriété vraie aux rangs n et $n-1$ où $n \geq 1$, on a alors
$$|a_n| \leq 1 \quad \text{et} \quad |a_{n-1}| \leq 1 \,,$$
d'où
$$|a_{n+1}| \leq \frac{1}{n+1}\, |a_n| + \frac{n-1}{n+1}\, |a_{n-1}| \leq \frac{1}{n+1} + \frac{n-1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \leq 1 \,.$$
La propriété est vraie au rang $n+1$. Elle sera donc vraie pour tout entier n.

Il résulte alors des critères de comparaison que la série a un rayon R supérieur ou égal à celui de la série géométrique. Donc $R \geq 1$.

2) On a
$$z'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} \,.$$
Posons
$$\mathscr{F}(x) = (1 - x^2) z'(x) - i z(x) \,.$$
On a alors
$$\mathscr{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} i b_n x^n \,,$$

ou encore
$$\mathscr{F}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)b_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} ib_n x^n.$$
Finalement
$$\mathscr{F}(x) = (b_1 - ib_0) + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)b_{n+1} - (n-1)b_{n-1} - ib_n]\, x^n\,.$$
Comme la série entière $\mathscr{F}(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc $b_1 - ib_0 = 0$, et pour tout entier $n \geq 0$,
$$(n+1)b_{n+1} - (n-1)b_{n-1} - ib_n = 0\,,$$
ce que l'on peut écrire
$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1}\,(ib_n) + \frac{n-1}{n+1}\,b_{n-1}\,.$$
Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, on a
$$b_n = i^n a_n\,.$$
On a tout d'abord
$$b_0 = 1 = a_0 \quad \text{et} \quad b_1 = ib_0 = i = ia_1\,.$$
La propriété est vraie aux rangs 0 et 1. Supposons qu'elle soit vraie aux rang n et $n-1$, pour un entier $n \geq 1$. Donc
$$b_n = i^n a_n \quad \text{et} \quad b_{n-1} = i^{n-1}a_{n-1}\,.$$
Alors
$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{n+1}\,i^{n+1}a_n + \frac{n-1}{n+1}\,i^{n-1}a_{n-1} \\ &= \frac{1}{n+1}\,i^{n+1}a_n - \frac{n-1}{n+1}\,i^{n+1}a_{n-1} \\ &= i^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\,a_n - \frac{n-1}{n+1}\,a_{n-1}\right)\,. \end{aligned}$$
Mais, en utilisant la relation de récurrence vérifiée par la suite (a_n), on trouve
$$b_{n+1} = i^{n+1}a_{n+1}\,.$$
La propriété est donc vraie au rang $n+1$. Il en résulte qu'elle est vraie pour tout $n \geq 0$.

Alors les séries entières $y(x)$ et $z(x)$ ont le même rayon de convergence. Donc $R = R' \geq 1$

3) Les équations différentielles se résolvent en utilisant le procédé heuristique suivant :

on écrit

(1) $$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x^2+1}\,,$$

on en déduit

$$\ln|y(x)| = \arctan x + C\,,$$

où C est une constante, et les solutions sont

$$y(x) = Ae^{\arctan x}\,,$$

où A est une constante que l'on détermine grâce à la condition $y(0) = 1$. On en déduit que $A = 1$ et

$$y(x) = e^{\arctan x}\,.$$

Pour l'autre équation, on écrit

$$\frac{z'(x)}{z(x)} = \frac{i}{1-x^2}\,, \tag{2}$$

soit

$$\frac{z'(x)}{z(x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{i}{1-x} + \frac{i}{1+x}\right)\,,$$

on en déduit

$$\ln|z(x)| = \frac{i}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + D\,,$$

où D est une constante, et les solutions sont, dans $\,]-1,\,1\,[\,$,

$$z(x) = B\exp\left(\frac{i}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)\,,$$

où B est une constante que l'on détermine grâce à la condition $z(0) = 1$. On en déduit que $B = 1$ et

$$z(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)\,.$$

Pour cette dernière solution on constate que lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, $z(x)$ n'a pas de limite finie. Il en résulte que $R = R' \leq 1$. On a donc finalement $R = R' = 1$.

Chapitre 8

SÉRIES ENTIÈRES ET INTÉGRALES

Etablir l'égalité

$$\int_0^1 \frac{t^2 \ln t}{t^2-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

Lorsque $0 < t < 1$, on a

$$\frac{t^2 \ln t}{t^2-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n+2} \ln t\,,$$

et cela définit une fonction continue sur $]\,0,\,1\,[$ qui est somme de fonctions continues sur $]\,0,\,1\,[$.

Posons

$$I_n = \int_0^1 t^{2n+2} \ln t\,dt\,.$$

Cette intégrale a un sens puisque la fonction qui à t associe $t^{2n+2}\ln t$ est continue sur $]\,0,\,1\,]$ et se prolonge par continuité en 0. En intégrant par parties on obtient sur $]\,0,\,1\,]$,

$$\int t^{2n+2} \ln t\,dt = \frac{t^{2n+3}}{2n+3}\ln t - \int \frac{t^{2n+2}}{2n+3}\,dt = \frac{t^{2n+3}}{2n+3}\ln t - \frac{t^{2n+3}}{(2n+3)^2}\,.$$

Alors

$$I_n = \left[\frac{t^{2n+3}}{2n+3}\ln t - \frac{t^{2n+3}}{(2n+3)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(2n+3)^2}\,,$$

car la limite en 0 de $t^{2n+3}\ln t$ est nulle.

Puisque

$$\int_0^1 t^{2n+2}|\ln t|\,dt = |I_n| \sim \frac{1}{4n^2}\,,$$

la série de terme général $|I_n|$ converge par comparaison à une série de Riemann. Il résulte alors du théorème d'intégration terme à terme que la fonction qui à t associe $\dfrac{t^2\ln t}{t^2-1}$ est intégrable sur $]\,0,\,1\,]$ et que

$$\int_0^1 \frac{t^2\ln t}{t^2-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} I_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

Soit f l'application de $[\,0,\,1\,]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0)=1$ et, pour tout x de $]\,0,\,1\,]$,

$$f(x) = x^{-x}\,.$$

Soit (f_n) la suite d'applications de $[\,0,\,1\,]$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_n(0)=0$ et, pour tout x de $]\,0,\,1\,]$,

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\,(x\ln x)^n\,.$$

1) Vérifier que f et f_n sont continues sur $[\,0,\,1\,]$.
2) Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est normalement convergente sur $[\,0,\,1\,]$.
3) En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} = \int_0^1 t^{-t}\,dt\,.$$

4) Donnez une valeur approchée à 10^{-2} près de $\displaystyle\int_0^1 t^{-t}\,dt$.

1) On sait que $x\ln x$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Alors $f_n(x)$ tend vers $f(0)=0$ quand x tend vers 0.

Pour x dans $]\,0,\,1\,]$, on écrit

$$f(x) = e^{-x\ln x}\,,$$

et on en déduit que $f(x)$ tend vers $f(0)=1$ quand x tend vers 0. Il en résulte que les fonctions f et f_n sont continues en 0. Par ailleurs, sur $]\,0,\,1\,]$, les fonctions f et f_n sont continues comme produits et composées de fonctions continues. Elles sont donc continues sur $[\,0,\,1\,]$.

2) Soit g la fonction qui à t associe $-t\ln t$ et qui se prolonge par continuité en zéro par la valeur zéro. Elle est alors continue sur l'intervalle $[\,0,\,1\,]$ et atteint son maximum. Si l'on note M ce maximum, on a

$$|f_n(x)| \le \frac{M^n}{n!}\,,$$

et comme la série de terme général $M^n/n!$ converge, la série de fonctions continues de terme général f_n est normalement convergente sur $[0,\,1]$.

3) En utilisant le développement en série entière de l'exponentielle, on obtient, si $t>0$, l'égalité

$$t^{-t}=e^{-t\ln t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t\ln t)^n}{n!}\,.$$

La convergence normale de la série de terme général f_n implique que l'on a

$$\int_0^1 t^{-t}\,dt=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t\ln t)^n}{n!}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1\frac{(-t\ln t)^n}{n!}\right)dt\,.$$

Il reste à calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1(-t\ln t)^n\,dt$.

Soit n et p des entiers tels que $1\le p\le n$. En intégrant par parties, on obtient

$$\int t^n(\ln t)^p\,dt=\frac{t^{n+1}}{n+1}(\ln t)^p-\int\frac{t^{n+1}}{n+1}\frac{p(\ln t)^{p-1}}{t}\,dt\,,$$

d'où l'on tire, puisque $t^n(\ln t)^{p-1}$ tend vers 0 en 0,

$$\int_0^1 t^n(\ln t)^p\,dt=-\frac{p}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{p-1}\,dt\,.$$

On en déduit facilement, par récurrence sur p, que, si $1\le p\le n$, on a

$$\int_0^1 t^n(\ln t)^p\,dt=\frac{(-1)^p p!}{(n+1)^p}\int_0^1 t^n\,dt=\frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}\,,$$

et finalement, en prenant $p=n$, on trouve

$$\int_0^1 t^n(\ln t)^n\,dt=\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}\,.$$

On en déduit que

$$\int_0^1 t^{-t}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\,,$$

ce qui, en changeant d'indice de sommation dans la série, donne le résultat voulu.

4) Majorons le reste de la série. On a

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^k}\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^k}=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)^n}\,.$$

En particulier
$$0 \leq R_3 \leq \frac{1}{3 \times 4^3} = \frac{1}{192} < 10^{-2}\,.$$

Donc
$$S_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} = \frac{139}{108}$$

est une valeur approchée de $\int\limits_0^1 t^{-t}\,dt$ à 10^{-2} près.

1) Justifier l'existence de l'intégrale
$$I = \int\limits_0^1 \ln t \ln(1-t)\,dt\,.$$

2) Pour tout entier naturel non nul n calculer $\int\limits_0^1 \frac{t^n \ln t}{n}\,dt$ et en déduire que
$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}\,.$$

3) Déterminer la valeur de I.

1) La fonction f qui à t associe $\ln t \ln(1-t)$ est continue sur $]\,0,\,1\,[$. Au voisinage de 0, on a
$$\ln(1-t) \sim -t\,,$$

et $t \ln t$ tend vers 0 quand t tend vers 0. Donc la fonction f se prolonge par continuité en 0. Par ailleurs, pour tout t de $]\,0,\,1\,[$, on a
$$f(t) = f(1-t)\,,$$

donc f se prolonge également par continuité en 1. Alors I est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

2) En intégrant par parties, on obtient
$$\int \frac{t^n \ln t}{n}\,dt = \frac{t^{n+1}\ln t}{n(n+1)} - \int \frac{t^n}{n(n+1)}\,dt = \frac{t^{n+1}\ln t}{n(n+1)} - \frac{t^{n+1}}{n(n+1)^2}\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^n \ln t}{n}\,dt &= \lim_{t\to 1}\left(\frac{t^{n+1}\ln t}{n(n+1)} - \frac{t^{n+1}}{n(n+1)^2}\right) - \lim_{t\to 0}\left(\frac{t^{n+1}\ln t}{n(n+1)} - \frac{t^{n+1}}{n(n+1)^2}\right)\\ &= -\frac{1}{n(n+1)^2}\,.\end{aligned}$$

Pour t dans $]\,0,\,1\,[$ on a

$$\ln t \ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \ln t}{n}\,.$$

Soit u_n la fonction définie sur $]\,0,\,1\,]$ par

$$u_n(t) = -\frac{t^n \ln t}{n}$$

que l'on prolonge en 0 par la valeur 0. La fonction u_n est dérivable sur $]\,0,\,1\,[$ et

$$u_n'(t) = -t^{n-1}\left(\ln t + \frac{1}{n}\right)\,.$$

On déduit alors des variations de u_n que cette fonction est positive et admet un maximum pour $t = e^{-1/n}$. Alors, pour tout x de $[\,0,\,1\,]$, on a

$$|u_n(t)| \leq u_n(e^{-1/n}) = \frac{1}{en^2}\,.$$

La série de fonctions continues de terme général u_n converge donc normalement sur $[\,0,\,1\,]$ et on peut écrire

$$I = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \ln t}{n}\,dt = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{n}\,dt\,,$$

ce qui permet d'en déduire que

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}\,.$$

3) En décomposant la fraction rationnelle en éléments simples, on a

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{(n+1)^2}\,.$$

En réduisant au même dénominateur, on trouve,

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{(n+1)^2} = \frac{(A+B)n^2 + (2A+B+C)n + A}{n(n+1)^2}\,.$$

Il suffit que l'on ait

$$A + B = 2A + B + C = 0 \quad \text{et} \quad A = 1$$

pour que, pour tout entier naturel non nul n,

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{(n+1)^2} .$$

On obtient $A = -B = -C = 1$.

Alors

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} .$$

La première série est télescopique et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 1 .$$

Pour la seconde on a, en utilisant une somme de série classique,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 .$$

Finalement

$$I = 2 - \frac{\pi^2}{6} .$$

Justifier l'existence de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

et exprimer I sous forme d'une série.

Pour t dans $]\,0,\,1\,[$, posons

$$f(t) = \frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}} .$$

La fonction f est négative et, au voisinage de 1,

$$f(t) = \frac{\ln(1-(1-t))}{\sqrt{1-t^2}} \sim -\sqrt{\frac{1-t}{2}} .$$

La fonction f se prolonge par continuité sur $]\,0,\,1\,]$.

Au voisinage de 0, on a

$$f(t) \sim \ln t ,$$

et $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt$ converge, donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ aussi. Cela justifie l'existence de I.

On peut développer en série entière de rayon 1 la fonction qui à t associe $(1-t^2)^{-1/2}$. On a

$$\begin{aligned}(1-t^2)^{-1/2} &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-t^2)^n\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}t^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n}\,.\end{aligned}$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int t^{2n}\ln t\,dt=\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\ln t-\int\frac{t^{2n}}{2n+1}\,dt=\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\ln t-\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2}\,,$$

et on en déduit

$$\int_0^1 t^{2n}\ln t\,dt=-\frac{1}{(2n+1)^2}\,,$$

donc

$$a_n=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_0^1 t^{2n}\ln t\,dt=-\frac{(2n)!}{2^{2n}(2n+1)^2(n!)^2}\,.$$

En utilisant la formule de Stirling on obtient

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_0^1 t^{2n}|\ln t|\,dt=|a_n|\sim\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4n\pi}}{2^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}2n\pi\,4n^2}=\frac{1}{4\sqrt{\pi}\,n^{5/2}}\,,$$

et la série de terme général $|a_n|$ converge. D'après le théorème d'intégration terme à terme, on retrouve le fait que f est sommable, et l'on peut de plus intervertir les sommations ce qui donne

$$I=\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(2n+1)^2(n!)^2}\,.$$

Pour tout entier naturel n, on pose,

$$I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}\,.$$

1) Trouver la limite ℓ de la suite (I_n).
2) Donner un équivalent de $(\ell - I_n)$.
3) Justifier l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\,.$$

4) Donner un développement asymptotique à trois termes de (I_n).

1) Les fonctions f_n définies sur $[\,0,\,1\,]$ par

$$f_n(t) = \frac{1}{1+t^n}$$

sont continues et majorées par la fonction intégrable constante 1, et forment une suite qui converge simplement vers 1, sur cet intervalle. Il résulte du théorème de convergence dominée que la suite (I_n) converge vers

$$\ell = \int_0^1 dt = 1\,.$$

2) Effectuons le changement de variable $t^n = u$ dans l'intégrale

$$\ell - I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,dt\,.$$

On a donc

$$t = u^{1/n} \quad \text{et} \quad dt = \frac{u^{1/n-1}}{n}\,du\,,$$

d'où

$$\ell - I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u}\,du\,.$$

Les fonctions g_n définies sur $[\,0,\,1\,]$ par

$$g_n(u) = \frac{u^{1/n}}{1+u}$$

sont continues et majorées par la fonction intégrable constante 1, et forment une suite qui converge simplement sur cet intervalle vers la fonction g définie par

$$g(u) = \frac{1}{1+u}\,.$$

Il résulte du théorème de convergence dominée que la suite $(n(\ell - I_n))$ converge vers

$$\int_0^1 \frac{du}{1+u} = \ln 2\,,$$

Donc

$$\ell - I_n \sim \frac{\ln 2}{n}\,.$$

3) En utilisant le développement en série entière au voisinage de 0 de $\ln(1+y)$, on obtient, si y appartient à $]\,0,\,1\,[$, la relation

$$\frac{\ln(1+y)}{y} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^k}{k+1}\,,$$

ce qui définit une fonction continue, somme de fonctions continues.

Or

$$\int_0^1 \frac{y^k}{k+1}\,dy = \frac{1}{(k+1)^2}$$

est le terme général d'une série convergente. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,dy$ converge et que

$$S = \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\,.$$

On peut obtenir la somme S de cette série à partir du résultat classique

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

On a en effet

$$\frac{\pi^2}{6} - S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} - S = 2\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+2)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}\,,$$

donc

$$S = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

4) En partant de la somme

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k t^{nk} = \frac{1-(-1)^{p+1} t^{n(p+1)}}{1+t^n}\,,$$

on obtient, en intégrant sur $]0,\,1[$,

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{nk+1} = I_n - \int_0^1 (-1)^{p+1} \frac{t^{n(p+1)}}{1+t^n}\, dt\,.$$

Mais

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n(p+1)}}{1+t^n}\, dt \leq \int_0^1 t^{n(p+1)}\, dt = \frac{1}{np+n+1}\,.$$

Donc, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n(p+1)}}{1+t^n}\, dt$ tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini, d'où l'on déduit

$$I_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{nk+1}\,.$$

On a alors

$$I_n = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{1}{1+\frac{1}{nk}}\,.$$

En utilisant la relation

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + \frac{u^2}{1+u}\,,$$

on peut alors écrire

$$\begin{aligned} I_n &= 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(1 - \frac{1}{nk} + \frac{\frac{1}{(nk)^2}}{1+\frac{1}{nk}}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} + \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\frac{1}{k^3}}{1+\frac{1}{nk}}\,. \end{aligned}$$

Mais

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{k^3}}{1+\frac{1}{nk}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\,.$$

On en déduit donc le développement asymptotique

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\,.$$

Pour toute entier naturel n on pose

$$I_n = \int_1^\infty e^{-t^n} dt$$

1) Déterminer la limite de (I_n).
2) Donner un équivalent de (I_n).
3) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $I_n x^n$. Etudier sa convergence en R et $-R$?

1) On peut appliquer le théorème de convergence dominé. Si, pour $x > 1$, l'on pose

$$f_n(x) = e^{-t^n},$$

la suite de fonctions continues (f_n) converge simplement vers 0. D'autre part

$$0 \leq f_n \leq f_1,$$

et f_1 est intégrable sur $]1, \infty[$. On en déduit que la suite (I_n) converge vers 0. On remarquera aussi que la suite I_n est décroissante.

2) En faisant le changement de variable $t^n = u$, qui est une bijection de $]1, \infty[$ sur $]1, \infty[$, on obtient

$$t = u^{1/n} \quad \text{et} \quad dt = \frac{u^{1/n-1}}{n} du,$$

donc

$$I_n = \frac{1}{n} \int_1^\infty e^{-u} u^{1/n-1} du.$$

La suite de fonctions continues (g_n) définie sur $]1, \infty[$ par

$$g_n(u) = e^{-u} u^{1/n-1}$$

converge simplement vers la fonction $u \mapsto e^{-u}/u$ et est majorée par f_1 qui est intégrable. On déduit du théorème de convergence dominée que la suite $\left(\int_1^\infty e^{-u} u^{1/n-1} du\right)$ converge vers $\int_1^\infty e^{-u} u^{-1} du$. Cette intégrale n'est pas nulle, puisque c'est l'intégrale d'une fonction continue strictement positive. On déduit du théorème de convergence dominée que

$$I_n \sim \frac{1}{n} \int_1^\infty \frac{e^{-u}}{u} du.$$

(On retrouve ainsi le résultat de la question 1).

3) Puisque la série de terme général x^n/n est de rayon 1, l'équivalent obtenu en 2) montre que la série de terme général $I_n x^n$ est aussi de rayon 1.

Lorsque $x = 1$, l'équivalent obtenu en 2) montre que la série de terme général I_n diverge.

Lorsque $x = -1$, la série de terme général $(-1)^n I_n$ est décroissante alternée donc converge.

Pour tout entier naturel n on pose

$$a_n = \int_n^\infty \frac{\operatorname{th} t}{t^2}\, dt\,.$$

1) Etudier la convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$ pour x réel.
2) On note $f(x)$ la somme de cette série pour $-1 \leq x < 1$. La fonction f est-elle continue en -1 ?

1) Puisque, lorsque x appartient à $[\,n, \infty\,[$, on a

$$\operatorname{th} n \leq \operatorname{th} x \leq 1\,,$$

on en déduit l'encadrement

$$\int_n^\infty \frac{\operatorname{th} n}{t^2}\, dt \leq a_n \leq \int_n^\infty \frac{dt}{t^2}\,,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\operatorname{th} n}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{n}\,.$$

Il résulte du théorème d'encadrement que (na_n) converge vers 1, et donc que

$$a_n \sim \frac{1}{n}\,.$$

Alors la série de terme général $a_n x^n$ est de rayon 1, puisque la série de terme général x^n/n est de rayon 1.

Lorsque $x = 1$, l'équivalent obtenu montre que la série de terme général a_n diverge.

Lorsque $x = -1$, la série de terme général $(-1)^n I_n$ est décroissante alternée donc converge.

2) Le théorème d'Abel montre alors que la fonction f est continue en -1.

Montrer que pour tout x réel les intégrales

$$f(x) = \int_0^{\pi/4} e^{-x^2 \tan^2 t}\, dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^{\pi/2} e^{-x^2 \tan^2 t}\, dt$$

convergent.
Etudier si les fonctions f et g sont développables en série entière au voisinage de 0, et si oui, donner le développement et le rayon de convergence.

• Etude de f.

Pour x fixé, la fonction qui à t associe $e^{-x^2 \tan^2 t}$ est continue sur $[0, \pi/2[$. En particulier l'intégrale $f(x)$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

En effectuant le changement de variable

$$u = \tan t$$

on obtient

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2u^2}}{1+u^2}\, du = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{1+u^2} \frac{x^{2n}}{n!}\, du\,.$$

Comme la série de l'exponentielle converge uniformément sur tout compact, on aura

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^2}\, du \right) x^{2n}\,.$$

On a donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$$

avec

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} I_n$$

où

$$I_n = \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^2}\, du\,.$$

Comme $|I_n|$ se majore par 1, on a

$$|a_n| \leq \frac{1}{n!}$$

et la série est de rayon infini.

Il reste à calculer I_n. Pour cela on part de l'identité

$$(1-X^n) = (1-X)\sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

dans laquelle on pose $X=-u^2$. On en déduit

$$(1+(-1)^{n+1}u^{2n}) = (1+u^2)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u^{2k}\,,$$

d'où

$$\frac{u^{2n}}{1+u^2} = \frac{(-1)^n}{1+u^2} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}u^{2k}\,.$$

On obtient donc en intégrant

$$I_n = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-1-k}}{2k+1}\,.$$

• Etude de g.

Pour $g(x)$, on peut commencer, si x n'est pas nul, par effectuer le changement de variable

$$u = |x|\tan t\,,$$

c'est-à-dire

$$t = \arctan\frac{u}{|x|} \quad \text{donc} \quad dt = \frac{|x|}{x^2+u^2}\,du\,.$$

Les intégrales

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x^2\tan^2 t}\,dt \quad \text{et} \quad |x|\int_0^{\infty}\frac{e^{-u^2}}{x^2+u^2}\,du$$

sont alors de même nature. Mais, si $u>0$,

$$0 \le \frac{e^{-u^2}}{x^2+u^2} \le \frac{1}{u^2}\,,$$

et l'intégrale $\int_1^{\infty}\frac{du}{u^2}$ converge, donc $g(x)$ également.

En utilisant le changement de variable précédent, on a, pour $x>0$,

$$\frac{g(0)-g(x)}{x} = \int_0^{\infty}\frac{1-e^{-u^2}}{x^2+u^2}\,du\,.$$

Posons, pour (x, u) dans $[\,0, +\infty\,[\times]\,0, +\infty\,[$,

$$\varphi(x, u) = \frac{1 - e^{-u^2}}{x^2 + u^2}\,.$$

Pour u fixé, cette fonction est continue par rapport à la variable x. On a la majoration

$$0 \leq \varphi(x, u) \leq \varphi(0, u)\,.$$

Si l'on pose, pour $u > 0$,

$$\varphi(u) = \varphi(0, u)\,,$$

on a au voisinage de 0,

$$0 \leq 1 - e^{-u^2} \sim u^2$$

et la fonction φ se prolonge en zéro par continuité par la valeur 1. D'autre part

$$\varphi(u) \leq \frac{1}{u^2}$$

et il en résulte que φ est intégrable sur $]\,0, \infty\,[$. Les conditions sont donc satisfaites pour dire que la fonction définie par

$$h(x) = \int_0^\infty \varphi(x, u)\, du$$

est continue en 0. Il en résulte que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(0) - g(x)}{x} = h(0) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-u^2}}{u^2}\, du > 0\,.$$

Comme la fonction g est paire, si elle était dérivable en 0, on devrait avoir

$$g'(0) = 0$$

ce qui n'est pas le cas. Ceci montre que g n'est pas dérivable en 0, et ne peut donc admettre de développement en série entière au voisinage de 0.

1) Pour quelles valeurs réelles de t, la série de terme général $1/n^t$ converge-t-elle ? On note alors
$$\zeta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}.$$

2) Montrer que si $t > 1$, on a
$$\int_0^{\infty} \frac{x^{t-1}}{e^x - 1}\, dx = \Gamma(t)\zeta(t).$$

3) Montrer que l'intégrale
$$T(t) = \int_0^{\infty} \frac{x^{t-1}}{e^x + 1}\, dx$$
converge si $t > 0$, et exprimer $T(t)$ en fonction de $\Gamma(t)$ et $\zeta(t)$. lorsque $t > 1$.

1) La série de Riemann de terme général $1/n^t$ converge si et seulement si $t > 1$.

2) Pour $t > 1$ fixé, soit f_n la fonction définie sur $]\,0,\,+\infty\,[$ par
$$f_n(x) = x^{t-1}e^{-(n+1)x}.$$

Cette fonction est continue et positive, et la série de terme général f_n converge simplement vers la fonction S définie par
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{x^{t-1}}{e^x - 1}.$$

Au voisinage de 0, on a
$$S(x) \sim \frac{1}{x^{2-t}},$$

et, puisque $2 - t < 1$, l'intégrale $\int\limits_0^1 S(x)\, dx$ converge.
Au voisinage de $+\infty$
$$S(x) \sim x^{t-1}e^{-x}$$

Comme $x^{t-1}e^{-x/2}$ tend vers zéro à l'infini, on a
$$x^{t-1}e^{-x} = \circ(e^{-x/2})$$

et il en résulte que l'intégrale $\int\limits_1^{\infty} S(x)\, dx$ converge. Finalement l'intégrale $\int\limits_0^{\infty} S(x)\, dx$ converge.
Il résulte alors du théorème de convergence dominé que
$$\int_0^{\infty} S(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{t-1}e^{-(n+1)x}\, dx.$$

En faisant le changement de variable $u = (n+1)x$, on trouve finalement

$$\int_0^\infty S(x)\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^t} \int_0^\infty u^{t-1}e^{-u}\,du = \Gamma(t)\zeta(t)\,.$$

3) Pour $t > 0$ fixé, soit g_n la fonction définie sur $]\,0,\,+\infty\,[$ par

$$g_n(x) = (-1)^n x^{t-1} e^{-(n+1)x}\,.$$

La série de terme général g_n est alternée et converge pour $x > 0$ vers la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{x^{t-1}}{1+e^x}\,.$$

D'autre part, la suite des sommes partielles (g_n) est telle que

$$0 \leq g_n \leq g_0 = f_0\,.$$

La fonction f_0 est intégrable sur $]\,0,\,+\infty\,[$. Il résulte de nouveau du théorème de convergence dominé que

$$\int_0^\infty g(x)\,dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty (-1)^n x^{t-1}e^{-(n+1)x}\,dx \;= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^t} \int_0^\infty u^{t-1}e^{-u}\,du = \Gamma(t) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^t}\,.$$

Si $t > 1$, on a

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^t} - \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^t} = -2\sum_{p=0}^\infty \frac{1}{(2p+2)^t} = -\frac{1}{2^{t-1}} \sum_{p=0}^\infty \frac{1}{(p+1)^t} = -\frac{1}{2^{t-1}}\,\zeta(t)\,,$$

et l'on en déduit que

$$T(t) = \left(1 - \frac{1}{2^{t-1}}\right) \Gamma(t)\zeta(t)\,.$$

1) Calculer $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ en fonction de $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. En déduire la valeur de l'intégrale

$$I_n = \int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2}\,dx\,.$$

2) Calculer

$$H(t) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos(xt)\,dx\,.$$

1) La fonction Γ vérifie, pour $x > 0$ la relation

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,.$$

On obtient donc

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\,,$$

d'où l'on déduit

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3}{2^n}\,\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\,\sqrt{\pi}\,.$$

En posant

$$t = x^2 \quad \text{donc} \quad dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}\,,$$

on obtient

$$I_n = \int_0^{\infty} t^n e^{-t}\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{n-1/2}e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}\,\sqrt{\pi}\,.$$

2) On a, quels que soient x et t réels,

$$\cos(xt) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(xt)^{2n}}{(2n)!}\,.$$

Pour t fixé, notons

$$f_n(x) = (-1)^n\frac{(xt)^{2n}}{(2n)!}\,e^{-x^2}\,.$$

On a

$$\sum_{n=0}^{\infty}|f_n(x)| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|xt|^{2n}}{(2n)!}e^{-x^2} = \operatorname{ch}(xt)e^{-x^2}\,.$$

Au voisinage de l'infini, on a

$$\operatorname{ch}(xt)e^{-x^2} \sim \frac{e^{-x^2+x|t|}}{2}\,.$$

Quand x tend vers l'infini, $1-|t|/x$ tend vers 0, donc, pour x assez grand

$$1-\frac{|t|}{x} > \frac{1}{2}\,,$$

et,

$$-x^2+x|t| = -x^2\left(1-\frac{|t|}{x}\right) < -\frac{x^2}{2} < -\frac{x}{2}\,.$$

Comme la fonction qui à x associe $e^{-x/2}$ est intégrable sur $[\,0,\,+\infty\,[$, cela montre que la fonction continue qui à x associe $\operatorname{ch}(xt)e^{-x^2}$ est intégrable sur $[\,0,\,+\infty\,[$.

Il résulte alors du théorème de convergence dominée que

$$H(t)=\int\limits_0^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)\right)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}f_n(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nI_n\frac{t^{2n}}{(2n)!}\,.$$

Donc

$$H(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{4^nn!}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-t^2/4}\,.$$

Soit la série entière de terme général

$$a_n=\frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^n t}{1+t}\,dt\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R de cette série et écrire sa somme sous forme d'intégrale lorsque x appartient à l'intervalle $[-R,\,R]$.

• Etudions tout d'abord la série entière de coefficient na_n. Elle a même rayon de convergence que la série de coefficient a_n puisque c'est sa série dérivée. Si l'on pose, pour x dans $]-1,\,1[$ et t dans $[0,\,\pi]$,

$$f_n(t)=\frac{\sin^n t}{1+t}\,x^n\,,$$

on a

$$|f_n(t)|\leq|x|^n\,,$$

et la série de fonctions continues f_n converge normalement sur $[0,\,\pi/2]$. On peut donc intervertir les sommations et il en résulte que la série entière de terme général na_nx^n converge. Sa somme vaut

$$S(x)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{(1+t)(1-x\sin t)}\,dt\,.$$

On a donc $R\geq1$.

Etudions ce qui se passe lorsque $x=1$. On a dans ce cas

$$f_n(t)=\frac{\sin^n t}{1+t}\quad,$$

et cette série de fonctions a pour somme

$$f(t)=\frac{1}{(1+t)(1-\sin t)}\,.$$

Comme f_n est positive, si la série de terme général a_n convergeait, elle aurait comme somme $\int\limits_0^{\pi/2} f(t)\,dt$, mais, au voisinage de $\pi/2$,

$$f(t) = \frac{1}{(1+t)(1-\cos(\pi/2-t))} \sim \frac{1}{1+\pi/2}\,\frac{2}{(\pi/2-t)^2}\,.$$

Donc f n'est pas intégrable et la série diverge. Il en résulte que $R \leq 1$. Finalement $R = 1$.

• On reprend l'étude précédente avec la fonction définie, pour x fixé dans $[-1,\,1]$ et t dans $[0,\,\pi/2]$, par

$$g_n(t) = \frac{\sin^n t}{n(1+t)}\,x^n\,.$$

Lorsque x appartient à $[-1,\,1]$, on a

$$|g_n(t)| \leq \frac{\sin^n t}{n(1+t)} = h_n(t)\ ,$$

La fonction h_n est continue et positive sur $[0,\,\pi/2[$ et la série de fonctions h_n converge vers

$$h(t) = \frac{-\ln(1-\sin t)}{1+t}\,.$$

Au voisinage de $\pi/2$, on a

$$\sin t = \cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2(1+\varepsilon(t))$$

où $\varepsilon(t)$ tend vers 0 en $\pi/2$. Alors

$$\ln(1-\sin t) = 2\ln\left(\frac{\pi}{2}-t\right) + \ln\frac{1+\varepsilon(t)}{2}\,,$$

et

$$\frac{\ln(1-\sin t)}{2\ln\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} = 1 + \frac{\ln\frac{1+\varepsilon(t)}{2}}{2\ln\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\,.$$

Cette expression tend vers 1 en $\pi/2$ et il en résulte que

$$\ln(1-\sin t) \sim 2\ln\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\ ,$$

et

$$h(t) \sim -\frac{2}{1+\pi/2}\,\ln\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\,.$$

Comme l'intégrale $\int\limits_0^1 \ln t\,dt$ converge, il en résulte que h est intégrable sur $[0,\,\pi/2[$. Alors, d'après le théorème de convergence dominée, on peut permuter les sommations et l'on en déduit que pour tout x de $[-1,\,1]$, on a

$$S(x) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{-\ln(1-x\sin t)}{(1+t)}\,dt\,.$$

Soit Φ une fonction continue et positive sur $[0, 1]$.
1) Montrer que l'on définit une fonction F sur $]-1, 1[$ en posant.

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\Phi(t)}{1+xt^2}\,dt\,.$$

2) Développer F en série entière au voisinage de 0. Que vaut le rayon de convergence R de la série obtenue si l'on suppose de plus qu'il existe a dans $[0, 1[$ tel que, Φ ne s'annule dans aucun intervalle $[a, b]$ où $a < b < 1$.
3) Si l'on appelle a_n le coefficient de la série précédente, montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \int_0^1 \frac{\Phi(t)}{1+t^2}\,dt\,.$$

4) Déterminer a_n lorsque

$$\Phi(t) = 1 - t\,,$$

et en déduire la somme

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}\,.$$

5) Donner un exemple de fonction continue positive Φ pour laquelle $R > 1$.

1) Pour x fixé dans $]-1, 1[$, la fonction qui à t associe

$$f(t) = \frac{\Phi(t)}{1+xt^2}$$

a un dénominateur qui ne s'annule pas car

$$0 \leq t \leq 1 < \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,.$$

Elle est alors continue sur $[0, 1]$, donc $F(x)$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

2) Notons M le maximum de Φ sur $[0, 1]$. Pour x fixé dans $]-1, 1[$, et pour t dans $[0, 1]$ posons

$$f_n(t) = \Phi(t)(-1)^n x^n t^{2n}\,.$$

On a

$$|f_n(t)| \leq M|x|^n\,.$$

Il en résulte que la série de fonctions continues de terme général f_n converge normalement sur $[0,\,1]$. Alors on peut inverser les sommations et

$$F(x) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right) ,$$

ce qui donne le développement en série entière

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \int_0^1 \Phi(t)t^{2n}\,dt\right) x^n .$$

En particulier on a $R \geq 1$.

Soit b tel que $a < b < 1$. La fonction Φ ne s'annule pas sur $[\,a,\,b\,]$. Soit

$$m = \inf_{a\leq t\leq b} \Phi(t) .$$

Comme Φ est continue, il existe t_0 dans $[\,a,\,b\,]$ tel que

$$m = f(t_0) ,$$

et donc m est strictement positif. Alors

$$a_n \geq m \int_a^b t^{2n}\,dt = \frac{m}{2n+1}\,(b^{2n+1} - a^{2n+1}) .$$

Le membre de droite est le terme général d'une série entière de rayon $1/b^2$, et donc

$$R \leq \frac{1}{b^2} .$$

Alors, en faisant tendre b vers 1, on en déduit

$$R \leq 1 ,$$

et finalement $R = 1$.

3) D'après ce qui précède

$$a_n = (-1)^n \int_0^1 \Phi(t)t^{2n}\,dt .$$

On a

$$|a_n| - |a_{n+1}| = \int_0^1 \Phi(t)t^{2n}(1-t^2)\,dt \geq 0 ,$$

et la suite $(|a_n|)$ est décroissante.

D'autre part
$$|a_n| \leq M \int_0^1 t^{2n}\,dt = \frac{M}{2n+1}\,,$$
et la suite (a_n) converge vers 0. La série de terme général a_n est donc une série alternée.

Il résulte alors du théorème d'Abel que l'on a
$$\lim_{x\to 1} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,.$$

Par ailleurs, si x appartient à $[0,\,1[$
$$\begin{aligned}\left|F(x) - \int_0^1 \frac{\Phi(t)}{1+t^2}\,dt\right| &= \left|\int_0^1 \left(\frac{\Phi(t)}{1+xt^2} - \frac{\Phi(t)}{1+t^2}\right)\,dt\right| \\ &= |x-1| \int_0^1 \frac{\Phi(t)t^2}{(1+t^2)(1+xt^2)}\,dt \\ &\leq M|x-1|\,.\end{aligned}$$

Il en résulte que
$$\lim_{x\to 1} F(x) = \int_0^1 \frac{\Phi(t)}{1+t^2}\,dt\,.$$

Finalement
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \int_0^1 \frac{\Phi(t)}{1+t^2}\,dt\,.$$

4) On a dans ca cas
$$a_n = (-1)^n \int_0^1 (1-t)t^{2n}\,dt = (-1)^n\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}\,.$$

Donc
$$\int_0^1 \frac{1-t}{1+t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}\,.$$

Comme
$$\int_0^1 \frac{1-t}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = \left[\arctan t - \frac{1}{2}\,\ln(1+t^2)\right]_0^1\,,$$

on a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}\,.$$

5) Soit a dans $]\,0,\,1\,[$. On prend une fonction nulle sur $[\,a,\,1\,]$, par exemple

$$\Phi(t) = \begin{cases} a-t & \text{si } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{si } a \leq t \leq 1 \end{cases}\,.$$

Alors

$$|a_n| = \int_0^a (a-t)t^{2n}\,dt = \left[\frac{at^{2n+1}}{2n+1} - \frac{t^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^a = \frac{a^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}\,,$$

et

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{(2n+3)(2n+4)}{(2n+1)(2n+2)}\,\frac{1}{a^2}$$

converge vers

$$R = \frac{1}{a^2} > 1\,.$$

Chapitre 9

CONVERGENCE NORMALE ET UNIFORME

Soit f_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$f_n(x) = x^n(1 - x^2)\,.$$

1) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n).
2) Etudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de terme général f_n.
3) Etudier la convergence normale et uniforme de la série de terme général f_n sur $[-1, \alpha]$, lorsque α appartient à $[0, 1[$.

1) Si $|x| < 1$, la suite (x^n) converge vers 0, donc la suite $(f_n(x))$ également.

Si $x = \pm 1$, la suite $(f_n(x))$ est nulle. Donc la suite f_n converge simplement vers 0.

Etudions les variations de f_n sur $[0, 1]$. On a

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n - (n+2)x^2)\,.$$

La fonction admet un maximum en

$$x_n = \sqrt{\frac{n}{n+2}}$$

En raison de la parité de f_n, ce maximum est le maximum de f_n sur $[-1, 1]$ et vaut

$$\|f_n\|_\infty = f_n(x_n) = \frac{2}{n+2}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-n/2}\,.$$

On a donc

$$\|f_n\|_\infty = \frac{2}{n+2}\exp\left(-\frac{n}{2}\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)\right) = \frac{2}{n+2}\,e^{-1+\circ(1)} \sim \frac{2}{ne}\,.$$

La suite $(\| f_n \|_\infty)$ converge vers 0. Il en résulte que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

2) Si $|x| < 1$, on somme une série géométrique et

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = (1-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1-x^2}{1-x} = 1+x\,.$$

Si $x = \pm 1$, on obtient cette fois

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = 0\,.$$

En particulier, la fonction S n'est pas continue en 1, alors que les fonctions f_n le sont. Il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme ou normale sur $[-1,\, 1]$.

3) On a encore

$$\sup_{x\in[-1,\alpha]} |f_n(x)| = \| f_n \|_\infty \sim \frac{2}{ne}\,,$$

et la série de terme général $1/n$ est une série harmonique qui diverge. Il n'y a pas de convergence normale sur $[-1,\, \alpha]$.

Sur $[0,\, \alpha]$, comme la suite (x_n) converge vers 1, on a, à partir d'un certain rang n_0, l'inégalité

$$x_n \geq \alpha\,.$$

Comme f_n est croissante sur $[0,\, x_n]$, on a donc

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(\alpha)\,,$$

et la série de terme général $f_n(\alpha)$ converge. Il en résulte que la série de terme général f_n converge normalement, donc uniformément sur $[0,\, \alpha]$.

Sur $[-1,\, 0]$, on a, par un calcul analogue à celui de la question 1,

$$R_N(x) = S(x) - S_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n(1-x^2) = x^{N+1}(1+x)\,.$$

On en déduit

$$R_N'(x) = (N+1)x^N + (N+2)x^{N+1}\,,$$

et la dérivée s'annule en

$$y_N = -\frac{N+1}{N+2}\,.$$

On en déduit

$$\sup_{x\in[-1,0]} |R_N(x)| = |R_N(y_N)| = |y_N^{N+1}|\,\frac{1}{N+2} \leq \frac{1}{N+2}\,.$$

La suite des restes converge uniformément vers 0 sur $[-1,\ 0]$. Il en résulte que la série de terme général f_n converge uniformément sur $[-1,\ 0]$.

Finalement, la série de terme général f_n converge uniformément sur $[-1,\ \alpha]$.

Soit f_n la fonction définie sur $[0,\ \pi/2]$ par

$$f_n(x) = \sin^{2n+1} x \cos^3 x\,.$$

1) Etudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de terme général f_n.
2) Etudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de terme général nf_n.
3) Etudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de terme général nf_n sur $[0,\ \pi/2-\alpha]$, lorsque α appartient à $]0,\ \pi/2[$.

1) Si x appartient à l'intervalle $[0,\ \pi/2[$, on a $|\sin x| < 1$ et donc on somme une série géométrique

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sin x \cos^3 x \sum_{n=0}^{\infty} (\sin^2 x)^n = \frac{\sin x \cos^3 x}{1-\sin^2 x} = \sin x \cos x\,.$$

Si $x = \pi/2$, on a $f_n(x) = 0$, et donc

$$S(\pi/2) = 0\,.$$

Donc, pour tout x de $[0,\ \pi/2]$,

$$S(x) = \sin x \cos x\,.$$

On a en dérivant,

$$f_n'(x) = (2n+1)\cos^4 x \sin^{2n} x - 3\cos^2 x \sin^{2n+2} x = \cos^2 x \sin^{2n} x((2n+1)-(2n+4)\sin^2 x)\,.$$

La fonction f_n atteint son maximum en un point x_n tel que

$$\sin^2 x_n = \frac{2n+1}{2n+4} \quad \text{et} \quad \cos^2 x_n = \frac{3}{2n+4}\,.$$

Alors

$$\|f_n\|_\infty = \left(\frac{2n+1}{2n+4}\right)^{n+1/2} \frac{3^{3/2}}{(2n+4)^{3/2}} \leq \frac{3^{3/2}}{(2n+4)^{3/2}}\,.$$

Or

$$\frac{3^{3/2}}{(2n+4)^{3/2}} \sim \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \frac{1}{n^{3/2}}\,,$$

et l'on compare a une série de Riemann convergente. La série de terme général f_n converge donc normalement.

2) Remarquons tout d'abord que, si x appartient à $]-1,\,1[$, en utilisant la série dérivée de

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}\,,$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

Si x appartient à l'intervalle $[0,\,\pi/2[$, on a $|\sin x| < 1$ et d'après ce qui précède

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nf_n(x) = \sin x\cos^3 x \sum_{n=0}^{\infty} n(\sin^2 x)^n = \frac{\sin^3 x\cos^3 x}{(1-\sin^2 x)^2} = \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,.$$

Alors que

$$T(\pi/2) = 0\,.$$

La fonction T n'est pas continue en $\pi/2$, alors que les fonctions nf_n le sont. Il ne peut donc y avoir convergence uniforme ou normale.

3) Sur $[0,\,\pi/2-\alpha]$, on a, puisque la fonction sinus est croissante,

$$|nf_n(x)| \leq n\sin^{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = n\cos^{2n+1}\alpha\,,$$

et la série de terme général $n\cos^{2n+1}\alpha$ converge et a pour somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\cos^{2n+1}\alpha = \cos\alpha \sum_{n=0}^{\infty} n(\cos^2\alpha)^n = \frac{\cos^3\alpha}{\sin^4\alpha}\,.$$

La série de terme général nf_n est donc normalement convergente sur $[0,\,\pi/2-\alpha]$.

Soit f_n la fonction définie sur $[0,\,\infty[$ par

$$f_n(x) = x^\alpha e^{-nx}\,,$$

où α est un nombre réel strictement positif.

1) Déterminer la somme de la série de terme général f_n.

2) Montrer que l'on a convergence normale si $\alpha > 1$, et que, si $\alpha \leq 1$, l'on n'a pas convergence uniforme.

3) Montrer que, pour tout $s > 0$, l'on a convergence normale sur $[s,\,+\infty[$.

1) Si $x > 0$, on a $e^{-x} < 1$ et l'on somme une série géométrique, donc

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{x^\alpha}{1 - e^{-x}} .$$

Si $x = 0$, alors $f_n(x)$ est nul et

$$S(x) = 0 .$$

2) En dérivant, on obtient

$$f_n'(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-nx} - n x^\alpha e^{-nx} = x^{\alpha-1} e^{-nx} (\alpha - nx) .$$

La fonction f_n admet un maximum en

$$x_n = \frac{\alpha}{n}$$

qui vaut

$$\| f_n \|_\infty = \frac{\alpha^\alpha e^{-\alpha}}{n^\alpha} .$$

Donc la série converge normalement si et seulement si $\alpha > 1$.

Si $\alpha < 1$, on a au voisinage de 0

$$S(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} \, x^{\alpha-1} \sim x^{\alpha-1} .$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} S(x) = +\infty ,$$

alors que

$$S(0) = 0 .$$

La fonction S n'est pas continue en 0 et, puisque les fonctions f_n sont continues, il ne peut y avoir convergence uniforme sur $[\,0,\, +\infty\,[$.

3) Comme la suite (x_n) converge vers 0, elle est inférieure à s à partir d'un certain rang n_0, et puisque f_n est décroissante sur $[\,x_n,\, +\infty\,[$, on aura, pour $n \geq n_0$ et pour $x \geq s$,

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(s) .$$

Comme la série de terme général $f_n(s)$ converge, la série de terme général f_n converge normalement sur $[\,s,\, +\infty\,[$.

Chapitre 10

AUTRES EXERCICES

Montrer que l'on définit une fonction g de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en posant

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{2n}(n!)^2}\,.$$

On peut comparer à la série de l'exponentielle, en remarquant que pour tout $n \geq 0$, on a

$$\frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \leq \frac{1}{n!}\,.$$

Il en résulte que la série entière définissant g a aussi un rayon de convergence infini. (On pourrait également utiliser la règle d'Alembert), et donc que g est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1/2$ et pour $x \neq 0$ par

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}\,.$$

Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On a, pour tout x réel,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,.$$

On en déduit que, pour $x \neq 0$, on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!}\,,$$

ce qui reste vrai pour $x = 0$.

La fonction f est donc développable en série entière de rayon infini et il en résulte qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Soit I l'ensemble des nombres réels x tels que la série entière de terme général $\ln n\, x^n$ converge. Pour x dans I on note
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln n\, x^n\,.$$
1) Déterminer I et étudier la continuité de f.
2) On pose $a_1 = -1$ et, pour $n \geq 2$,
$$a_n = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\,.$$
Déterminer le domaine de définition de la fonction g qui à x associe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.
3) Trouver une relation entre f et g.
4) Calculer $g(1)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1.
5) Calculer $g(-1)$. En déduire la limite en -1 de f.

1) Si l'on pose
$$b_n = \ln n\,,$$
et si R est le rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n x^n$, on a alors
$$\frac{|b_n|}{|b_{n+1}|} = \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \frac{1}{1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}}\,,$$
et cette suite converge vers $R = 1$. Par ailleurs, lorsque $x = \pm 1$, la suite $(b_n x^n)$ ne converge pas vers 0 et la série de terme général $b_n x^n$ diverge. Donc I est l'intervalle $]-1,\, 1[$. Alors la fonction f est continue sur I.

2) En utilisant le développement limité en 0,
$$\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} + \circ(u)\,,$$
on obtient
$$a_n = \frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2}\,,$$
et il en résulte que la suite $(|a_n|/|a_{n+1}|)$ converge vers $R = 1$. Par ailleurs, la série de terme général $a_n x^n$ converge absolument si $x = \pm 1$. Le domaine de définition de g est donc $[-1,\, 1]$.

3) En écrivant, pour $n \geq 2$,

$$a_n = \ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n}\,,$$

on a, lorsque $|x| < 1$,

$$\begin{aligned} g(x) &= -x - \sum_{n=2}^{\infty} \ln(n-1)\, x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \ln n\, x^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \ln n\, x^{n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \ln n\, x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= -xf(x) + f(x) + \ln(1-x)\,. \end{aligned}$$

Donc

$$g(x) = (1-x)f(x) + \ln(1-x)\,.$$

4) Pour obtenir $g(1)$, calculons la somme partielle

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n\,,$$

Il apparaît une série télescopique,

$$S_N = -1 - \sum_{n=2}^{N} (\ln(n-1) - \ln n) - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{n} = \ln N - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{n}\,.$$

Mais la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln N\right)$ converge vers la constante d'Euler γ. Donc

$$g(1) = \lim_{n\to+\infty} S_n = -\gamma\,.$$

Alors, lorsque $|x| < 1$, on a

$$f(x) = \frac{g(x) - \ln(1-x)}{1-x} = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}\left(1 - \frac{g(x)}{\ln(1-x)}\right)\,,$$

et puisque $g(x)/\ln(1-x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1^-, on en déduit que, quand x tend vers 1^-, on a

$$f(x) \sim -\frac{\ln(1-x)}{1-x}\,.$$

5) Pour obtenir $g(-1)$, calculons la somme partielle

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n(-1)^n\,.$$

$$
\begin{aligned}
s_N &= 1-\sum_{n=2}^{N}(\ln(n-1)-\ln n)(-1)^n-\sum_{n=2}^{N}\frac{(-1)^n}{n}\\
&= \sum_{n=2}^{N}((-1)^{n-1}\ln(n-1)+(-1)^n\ln n)+\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\\
&= \sum_{n=1}^{N-1}(-1)^n\ln n+\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\ln n+\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\\
&= 2\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\ln n-(-1)^N\ln N+\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,.
\end{aligned}
$$

On a en particulier, lorsque $N=2p$,

$$
\begin{aligned}
s_{2p} &= 2\sum_{n=1}^{2p}(-1)^n\ln n-\ln(2p)+\sum_{n=1}^{2p}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\\
&= \ln\left[\left(\frac{2\cdots(2p)}{1\cdots(2p-1)}\right)^2\frac{1}{2p}\right]+\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\\
&= \ln\frac{2^{4p}(p!)^4}{2p((2p)!)^2}+\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,.
\end{aligned}
$$

Mais, en utilisant la formule de Stirling, on obtient

$$
\frac{2^{4p}(p!)^4}{2p((2p)!)^2}\sim\frac{2^{4p}\left(\frac{p}{e}\right)^{4p}(2p\pi)^2}{\left(\frac{2p}{e}\right)^{4p}(4p\pi)(2p)}=\frac{\pi}{2}\,,
$$

et la suite $\left(\sum_{n=1}^{2p}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$ converge vers $\ln 2$ par application du théorème d'Abel à la série entière de rayon de convergence 1 et de terme général $(-1)^{n-1}x^n/n$ dont la somme vaut $\ln(1+x)$.

Donc la suite (s_{2p}) converge vers $\ln\frac{\pi}{2}+\ln 2$, et puisque la série de terme général $a_n(-1)^n$ converge, la suite (s_n) converge et a même limite que la suite (s_{2p}). On a donc

$$
g(-1)=\lim_{n\to+\infty}s_n=\ln\frac{\pi}{2}+\ln 2=\ln\pi\,.
$$

Alors, lorsque x tend vers -1,

$$
f(x)=\frac{g(x)-\ln(1-x)}{1-x}
$$

tend vers

$$
\frac{g(-1)-\ln 2}{2}=\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}\,.
$$

1) Montrer que la série entière de terme général $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

2) Pour tout x réel, on pose

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{x^n}{n!}\quad\text{et}\quad g(x)=\frac{1}{\sqrt{e}}\,e^{ex}\,.$$

Montrer que lorsque x tend vers $+\infty$, on a

$$f(x)\ \sim\ g(x)\,.$$

1) Pour tout entier naturel n, posons

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{n!}\,,$$

et cherchons un équivalent de a_n.

On a tout d'abord

$$n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=n-\frac{1}{2}+\circ(1)\,.$$

Donc

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{n-\frac{1}{2}+\circ(1)}\sim\frac{e^n}{\sqrt{e}}\,.$$

Il en résulte que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{n!}\sim\frac{e^n}{\sqrt{e}}\frac{1}{n!}\,.$$

La série entière de coefficient $e^n/n!$ est la série de l'exponentielle. Elle a donc un rayon de convergence infini. Alors la série entière de coefficient a_n a aussi un rayon de convergence infini.

Posons

$$b_n=\frac{e^n}{\sqrt{e}}\frac{1}{n!}\,.$$

Pour tout x réel, on a alors

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\,.$$

2) Pour tout $n\geq 0$, posons

$$\varepsilon_n=a_n/b_n-1\,.$$

On a donc
$$a_n = b_n + b_n\varepsilon_n\,,$$
et, puisque $a_n \sim b_n$, la suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0. Alors, pour $x > 0$, on obtient en sommant
$$f(x) = g(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n\varepsilon_n x^n\,.$$
Montrer que $f(x) \sim g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ revient alors à montrer que la quantité
$$u(x) = \frac{1}{g(x)}\sum_{n=0}^{\infty} b_n\varepsilon_n x^n$$
tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $n \geq N$ implique
$$|\varepsilon_n| < \varepsilon/2\,.$$
Alors, pour $x > 0$, on obtient
$$\frac{1}{g(x)}\left|\sum_{n=0}^{\infty} b_n\varepsilon_n x^n\right| \leq \frac{\varepsilon}{2g(x)}\sum_{n=N}^{\infty} b_n x^n + \frac{1}{g(x)}\sum_{n=0}^{N-1} b_n|\varepsilon_n|x^n \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{g(x)}\sum_{n=0}^{N-1} b_n|\varepsilon_n|x^n\,.$$
Mais, puisque les fonctions polynômes sont négligeables devant g en $+\infty$, on a alors
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{g(x)}\sum_{n=0}^{N-1} b_n|\varepsilon_n|x^n = 0\,.$$
Donc il existe $\alpha > 0$ tel que $x > \alpha$ implique
$$\frac{1}{g(x)}\sum_{n=0}^{N-1} b_n|\varepsilon_n|x^n < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$
Alors
$$|u(x)| = \frac{1}{g(x)}\left|\sum_{n=0}^{\infty} b_n\varepsilon_n x^n\right| < \varepsilon\,,$$
ce qui montre que $u(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, d'où l'on déduit l'équivalence
$$f(x) \sim g(x)$$
au voisinage de $+\infty$.

On considère la série entière de terme général $(-1)^n x^{2^n}$.
1) Quel est le rayon de convergence R de cette série entière ?
Pour $|x| < R$, on pose
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2^n}.$$
2) Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x^2)$.
3) Que dire de la limite de f en 1 si elle existe ?
4) S'il existe x_0 dans $]-1,\, 1[$ tel que $f(x_0) > 1/2$ montrer que f n'a pas de limite en 1 (on pourra utiliser une relation entre $f(x)$ et $f(x^4)$).
5) On a $f(0,995) > 0,5008$. Qu'en conclure ? Comment a-t-on pu vérifier cette inégalité ?

1) La suite $(|x^{2^n}|)$ converge vers 0 lorsque $|x| < 1$, et ne converge pas vers 0 lorsque $|x| = 1$. Le rayon de la série entière vaut donc $R = 1$.

2) Lorsque $|x| < 1$, on a
$$f(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x^2)^{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2^{k+1}} = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^{2^k} = x - f(x),$$
et donc
$$f(x) = x - f(x^2).$$
3) Si f admet une limite ℓ en 1, alors par passage à la limite dans la relation précédente, on obtient
$$\ell = 1 - \ell,$$
et l'on en déduit que ℓ vaut $1/2$.

4) Lorsque $|x| < 1$, on a aussi
$$f(-x) = -x - f(x^2),$$
donc
$$f(-x) = -2x + f(x).$$
Alors, si $f(x_0) > 1/2$, avec x_0 dans $]-1,\, 0[$, on aura également
$$f(-x_0) = -2x_0 + f(x_0) > f(x_0) > 1/2.$$
On peut donc supposer que x_0 appartient à $]0,\, 1[$.

En utilisant de nouveau l'égalité obtenue en 1), on obtient, lorsque $|x| < 1$, la relation
$$f(x) = x - x^2 + f(x^4),$$
et donc, pour x dans $]0,\, 1[$, on a
$$f(x) > f(x^4)$$

ou encore

$$f(x^{1/4}) > f(x)\,.$$

Considérons alors la suite $(x_0^{1/4^n})$. Cette suite converge vers 1, et d'après ce qui précède la suite $(f(x_0^{1/4^n}))$ est croissante et minorée par son premier terme $f(x_0)$. Si cette suite admettait une limite ℓ on aurait

$$\ell \geq f(x_0) > 1/2\,.$$

On a donc une contradiction. Il en résulte que la fonction f n'a pas de limite en 1.

5) Il résulte de l'inégalité

$$f(0,995) > 0,5008$$

et de 4) que la fonction f n'a pas de limite en 1.

Pour obtenir l'inégalité précédente, on peut remarquer que pour x dans $]\,0,\,1\,[$, la série de terme général $(-1)^n x^{2^n}$ est une série alternée. La suite $(S_{2n+1}(x))$ des sommes partielles de rang impair est donc une suite croissante, et, quel que soit n, on a

$$f(x) \geq S_{2n+1}(x)\,.$$

En particulier le calcul de $S_{11}(0,995)$ donne la valeur $0,5008815850$, donc

$$f(0,995) \geq S_{11}(0,995) > 0,5008\,.$$

Soit α dans l'intervalle $]\,0,\,1\,[$. Pour $|x| < 1$ on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}\,.$$

Trouver un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers 1^-.

Les nombres α et x étant fixés dans $]\,0,\,1\,[$, soit la fonction f définie sur $]\,0,\,\infty\,[$ par

$$f(t) = x^t t^{-\alpha}\,.$$

Cette fonction est dérivable et

$$f'(t) = x^t t^{-\alpha-1}(t\ln x - \alpha) < 0\,.$$

Donc f est décroissante. On a alors, par comparaison à des intégrales,

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(t)dt = \int_0^N f(t)\,dt\,,$$

et

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \sum_{n=1}^{N} \int_{n}^{n+1} f(t)dt = \int_{1}^{N+1} f(t)\,dt\,,$$

d'où l'on déduit, en faisant tendre N vers l'infini,

$$\int_{1}^{\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_{0}^{\infty} f(t)\,dt\,.$$

Les intégrales se calculent avec le changement de variable $u = -t\ln x$ et l'on obtient

$$(-\ln x)^{\alpha-1} \int_{-\ln x}^{\infty} u^{-\alpha}e^{-u}du \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \leq (-\ln x)^{\alpha-1} \int_{0}^{\infty} u^{-\alpha}e^{-u}du = (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\,,$$

d'où

$$(-\ln x)^{\alpha-1} \left(\Gamma(1-\alpha) - \int_{0}^{-\ln x} u^{-\alpha}e^{-u}du\right) \leq S(x) \leq (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\,,$$

et finalement

$$1 - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{-\ln x} u^{-\alpha}e^{-u}du \leq \frac{S(x)}{(-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)} \leq 1\,.$$

Les membres de gauche et de droite tendent vers 1 quand x tend vers 1^-. On en déduit que le terme central tend aussi vers 1 et donc que

$$S(x) \sim (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\,,$$

Enfin, puisque

$$-\ln x = -\ln(1-(1-x)) \sim 1-x\,,$$

on obtient

$$S(x) \sim \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(1-x)^{1-\alpha}}\,.$$

Soit (a_n) une suite de nombres complexes. On suppose que le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n vaut $+\infty$. Pour tout nombre complexe z, on pose

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

1) Montrer que, pour tout nombre réel $r > 0$ et tout entier naturel p,

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}dt = 2\pi r^p a_p .$$

2) On suppose que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Etablir l'existence d'un nombre réel positif M vérifiant, pour tout nombre réel $r > 0$ et tout nombre entier naturel p, l'inégalité

$$|a_p| \leq \frac{M}{r^p} .$$

Montrer que tous les coefficients a_p autres que a_0 sont nuls. En déduire que f est constante.

3) On suppose qu'il existe un nombre entier naturel q non nul et deux nombres réels strictement positifs α et β tels que, pour tout nombre complexe Z, on ait l'inégalité

$$|f(Z)| \leq \alpha |Z|^q + \beta .$$

Montrer que f est un polynôme.

4) On suppose que pour tout nombre complexe z on a l'inégalité

$$f(z) \leq e^{\mathrm{Re}(z)} .$$

Montrer qu'il existe un nombre complexe K tel que, pour tout nombre complexe z, on ait

$$f(z) = Ke^z .$$

1) Pour t dans $[0, 2\pi]$, posons

$$f_n(t) = a_n r^n e^{i(n-p)t} .$$

Alors

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}dt = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\, dt .$$

Mais

$$0 \leq \int_0^{2\pi} |f_n(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} |a_n| r^n\, dt = 2\pi |a_n| r^n ,$$

et pour tout z dans $\mathbb{C}$ la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente. Par suite la série de terme général $|a_n|r^n$ converge et la série de terme général $\int\limits_0^{2\pi} |f_n(t)|\,dt$ également. De plus

$$\int\limits_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} f_n(t)\,dt\,.$$

Mais $\int\limits_0^{2\pi} f_n(t)\,dt$ est nulle si $n \neq p$ et vaut $2\pi a_p r^p$ si $n = p$. On obtient donc

$$\int\limits_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}dt = 2\pi r^p a_p\,.$$

2) Si l'on suppose que f est bornée, alors il existe une constante M telle que, pour tout nombre z complexe, on ait

$$|f(z)| \leq M\,.$$

On en déduit alors, les inégalités

$$2\pi r^p|a_p| = \left|\int\limits_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}dt\right| \leq \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{it})|\,dt \leq 2\pi M\,,$$

et donc

$$|a_p| \leq \frac{M}{r^p}\,.$$

Si $p \geq 1$, on en déduit en faisant tendre r vers l'infini, que a_p est nul, et donc que $f(z) = a_0$. La fonction f est constante.

3) Par la même majoration que dans 2), on obtient

$$2\pi r^p|a_p| \leq \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{it})|\,dt \leq \int\limits_0^{2\pi} (\alpha r^q + \beta)\,dt = 2\pi(\alpha r^q + \beta)\,,$$

et donc

$$|a_p| \leq \frac{\alpha r^q + \beta}{r^p}\,.$$

Si $p > q$, on en déduit en faisant tendre r vers l'infini, que a_p est nul, et donc que

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_q z^q\,.$$

La fonction f est un polynôme.

4) Considérons la fonction g définie par

$$g(z) = f(z)e^{-z}\,.$$

Puisque le produit de Cauchy de deux séries entières de rayon infini est une série entière de rayon infini, la fonction g possède un développement en série entière de rayon infini. Par ailleurs

$$|g(z)| = |f(z)e^{-z}| \leq e^{\operatorname{Re} z}|e^{-z}| = 1\,,$$

et g est bornée. Il résulte de 2) que g est une constante K. Alors, pour tout nombre z complexe,

$$f(z) = Ke^z\,.$$

1) Déterminer le domaine de convergence E de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}\,x^n$.
Pour x dans E, on note

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}\,x^n\,.$$

Est-ce que f est continue sur E ?
2) Pour x dans E, expliciter $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.
3) Soit g définie par

$$g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \left(\frac{x}{1-x}\right)^n\,.$$

Déterminer l'ensemble de définition F de g, et, pour x dans F, la valeur de $g(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.
4) La fonction g est-elle développable en série entière en 0 ? Si c'est le cas expliciter les coefficients et le rayon de convergence de cette série entière.

1) Notons a_n le coefficient d'ordre n de la série. La limite de $|a_n|/|a_{n+1}|$ vaut $R = 1$, et la série entière est de rayon 1. Elle converge donc pour tout x dans $]-1,\,1[$ et f est continue sur cet intervalle.

Par ailleurs, si $|x| = 1$, on a

$$|a_n x^n| \sim \frac{1}{n^2}\,,$$

et la série converge absolument. Donc E est l'intervalle $[-1,\,1]$. De plus il résulte du théorème d'Abel que la fonction f est continue en 1 et -1. Finalement f est continue sur E.

2) Sur $]-1,\,1[$, la fonction f est dérivable et l'on a

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1}\,x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,x^n = \ln(1+x)\,.$$

Par ailleurs $f(0) = 0$. Donc f est la primitive, nulle en 0 de $\ln(1+x)$. Pour tout x de $]-1,\,1[$ on obtient donc

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\,,$$

et ce résultat subsiste par continuité en 1 et en -1 : on aura

$$f(1) = 2\ln 2 - 1 \quad \text{et} \quad f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x) = 1\,.$$

3) La fonction g est définie si et seulement si

$$-1 \leq \frac{x}{1-x} \leq 1\,.$$

Or

$$1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

est positif si et seulement si $x < 1$, et avec cette condition

$$1 - \frac{x}{1-x} = \frac{1-2x}{1-x}$$

est positif si et seulement si $x \leq 1/2$. Le domaine de définition de g est donc

$$F =]\,-\infty,\, 1/2\,]\,.$$

Pour tout x de F, on a alors,

$$g(x) = f\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} = \frac{-\ln(1-x)-x}{1-x}\,.$$

4) La fonction g est alors développable en série entière au voisinage de 0 de rayon au moins 1 comme produit de Cauchy de deux fonctions développables en série entière de rayon 1.

On peut expliciter les coefficients de cette série en effectuant le produit de Cauchy. Pour $|x| < 1$, on a

$$-\ln(1-x) - x = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,.$$

Alors

$$\frac{-\ln(1-x)-x}{1-x} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n\,.$$

Comme la suite $\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)$ ne converge pas vers 0, on en déduit que le rayon de la série entière obtenue est exactement égal à 1.

On remarquera que l'égalité

$$g(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$$

n'a lieu que si x appartient à $]\,-1,\, 1/2\,]$.

Lorsque $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x}\,.$$

1) Quelle est la limite de $\zeta(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

2) Pour quels nombres réels x la série de terme général $\dfrac{\zeta(n)}{n}\, x^n$ converge-t-elle ?

1) On remarque tout d'abord que la série définissant ζ converge si et seulement si $x > 1$. On a en particulier $\zeta(x) > 1$, et la fonction ζ est décroissante sur $]\,1,\, \infty\,[$ Il en résulte que ζ admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

Comme la série est positive, on a

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^x} \leq \zeta(x) \quad \text{et} \quad \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p+1)^x} \leq \zeta(x)\,.$$

Les suites $\left(\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^x}\right)$ et $\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^x}\right)$ sont croissantes majorées. Elles convergent donc. Alors on a

$$\zeta(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^x} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^x}\,,$$

mais en majorant $1/(2p+1)$ par $1/(2p)$ lorsque $p \geq 1$, on obtient

$$\zeta(x) \leq 1 + 2\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^x} = 1 + \frac{2}{2^x} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^x} \leq 1 + \frac{2\zeta(x)}{2^x}\,.$$

On a donc l'encadrement

$$(\star) \qquad 1 \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{2\zeta(x)}{2^x}\,.$$

Mais $1 + 2\zeta(x)/2^x$ tend vers 1 à $+\infty$, et il résulte du théorème d'encadrement que $\zeta(x)$ tend également vers 1 à $+\infty$.

2) On a

$$\frac{\zeta(n)}{n} \sim \frac{1}{n}\,,$$

et comme la série entière de terme général x^n/n est de rayon 1, il en est de même de la série de terme général $\zeta(n)x^n/n$. De plus lorsque $x = 1$, la série de terme général $\zeta(n)/n$ diverge, puisque la série de terme général $1/n$ diverge.

La suite $(\zeta(n))_{n\geq 2}$ est majorée par $\zeta(2)$. L'inégalité $(\star)$ permet donc d'écrire

$$\zeta(n) = 1 + O(1/2^n)\,.$$

Alors
$$(-1)^n\frac{\zeta(n)}{n}=\frac{(-1)^n}{n}+O(2^{-n})\,.$$
Comme les séries de termes généraux $(-1)^n/n$ et $1/2^n$ convergent, il en est de même de la série de terme général $(-1)^n\zeta(n)/n$.

En résumé, la série de terme général $\zeta(n)x^n/n$ converge si et seulement si x appartient à l'intervalle $[-1,\,1[$.

1) Pour tout entier naturel n, on note A_n le nombre de couples (p,q) de $\mathbb{N}^2$ tels que $p+4q=n$. Montrer que
$$A_n=1+\left[\frac{n}{4}\right]\,,$$
où $\left[\frac{n}{4}\right]$ désigne la partie entière de $\frac{n}{4}$.

2) Développer $\frac{1}{(1-x)^2}$ en série entière de x au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?

3) En déduire le développement de $\frac{1}{(1-x^4)^2}$ en série entière de x au voisinage de 0, ainsi que le rayon de convergence de la série obtenue.

4) On considère la série entière de terme général
$$u_n(x)=\left(1+\left[\frac{n}{4}\right]\right)\,x^n\,.$$
1.a Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
1.b Calculer sa somme.

5) A l'aide du produit de Cauchy des développements en série entière de $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1-x^4}$, retrouver le résultat de la première question.

1) Dire que $p+4q=n$ avec p et q entiers naturels, est équivalent à dire que q est un entier compris entre 0 et $n/4$ et $p=n-4q$. le nombre A_n est donc le nombre d'entiers compris entre 0 et $n/4$, c'est-à-dire
$$A_n=1+\left[\frac{n}{4}\right]\,.$$
2) Pour x dans $]-1,\,1[$, posons
$$f(x)=\frac{1}{1-x}\,.$$
Cette fonction a pour développement en série entière de rayon 1,
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\,.$$

Alors f est dérivable sur $]-1,1[$, et sa dérivée f' admet le développement en série entière de rayon 1

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\,.$$

3) En remplaçant x par x^4 dans le développement précédent lorsque $x^4<1$, on obtient

$$\frac{1}{(1-x^4)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{4n}\,.$$

Par ailleurs cette série entière diverge si $x^4>1$, donc elle a encore un rayon de convergence égal à 1.

4.a Pour tout entier naturel n, on a

$$\frac{n}{4}\leq A_n\leq 1+\frac{n}{4}\,,$$

dont on déduit que

$$A_n\sim\frac{n}{4}\sim\frac{n+1}{4}\,.$$

Comme la série entière de terme général $(n+1)x^n$ est de rayon 1 d'après la question 2), il en résulte que la série de terme général A_nx^n est aussi de rayon 1.

4.b Remarquons que l'on a

$$\left[\frac{n}{4}\right]=p$$

si et seulement si n est un des nombres $4p$, $4p+1$, $4p+2$, $4p+3$. On va donc sommer la série en regroupant les termes quatre par quatre. Soit $|x|<1$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{4p+3}A_nx^n &= \sum_{r=0}^{p}(A_{4r}x^{4r}+A_{4r+1}x^{4r+1}+A_{4r+2}x^{4r+2}+A_{4r+3}x^{4r+3})\\ &= \sum_{r=0}^{p}(r+1)x^{4r}(1+x+x^2+x^3)\\ &= (1+x+x^2+x^3)\sum_{r=0}^{p}(r+1)x^{4r}\,.\end{aligned}$$

Alors, puisque toutes les séries en présence sont de rayon 1, on obtient, en faisant tendre p vers l'infini,

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n=(1+x+x^2+x^3)\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)x^{4r}=\frac{1-x^4}{1-x}\,\frac{1}{(1-x^4)^2}=\frac{1}{(1-x)(1-x^4)}\,.$$

5) Pour $|x|<1$, on obtient en utilisant le produit de Cauchy,

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^4)}=\left(\sum_{p=0}^{\infty}x^p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty}x^{4q}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+4q=1}1\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n\,.$$

Par unicité du développement en série entière, on déduit de la question 4.b que

$$A_n = 1 + \left[\frac{n}{4}\right].$$

Pour tout entier naturel n on pose

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1) Déterminer l'intervalle de convergence I de la série entière de terme général $a_n x^n$.

2) Pour x dans I calculer

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

3) Déterminer les coefficients du développement de $\dfrac{e^x}{(1-x)^2}$ en série entière de la variable x sur l'intervalle $]-1,\, 1[$

1) La suite (a_n) converge vers le nombre e. Donc

$$a_n \sim e\,,$$

et la série entière de terme général $a_n x^n$ a même rayon de convergence R que la série géométrique de terme général $e\,x^n$: on en déduit que $R = 1$. De plus, la série diverge grossièrement si $x = \pm 1$. Finalement $I =]-1,\, 1[$.

2) Pour calculer la somme $S(x)$ de la série si $|x| < 1$ sans utiliser de sommes doubles, on peut remarquer que, si $n \geq 1$, on a

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n!}.$$

Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1\,.$$

Mais

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = S(x) - a_0 - xS(x)\,.$$

On en déduit que

$$S(x) = \frac{e^x}{1-x}.$$

3) Si, pour $|x| < 1$, l'on dérive cette dernière relation, on obtient

$$S'(x) = S(x) + \frac{e^x}{(1-x)^2}\,,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{e^x}{(1-x)^2} = S'(x) - S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}((n+1)a_{n+1} - a_n)x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)\left(\frac{1}{(n+1)!} + a_n\right) - a_n\right) x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!} + na_n\right) x^n .$$

1) Soit n un entier naturel. Montrer l'existence du nombre

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} .$$

2) Montrer que l'on a l'égalité

$$R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt .$$

3) Montrer que la série de terme général R_n converge et calculer sa somme.

1) Le nombre R_n est le reste d'une série alternée convergente. En appliquant au point $x = 1$ le théorème d'Abel à la série entière de terme général $(-1)^n x^n/n$ dont la somme vaut $-\ln(1+x)$, on obtient

$$-\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} ,$$

ce qui permet d'écrire aussi

$$R_n = -\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} .$$

2) Posons

$$u_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt .$$

On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (-1)^{n+2} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt \\ &= (-1)^{n+2} \int_0^1 \frac{t^{n+1} + t^n}{1+t}\, dt = (-1)^{n+2} \int_0^1 t^n dt = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\,. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + u_0\,.$$

Comme

$$u_0 = -\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = -\Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 = -\ln 2\,,$$

on obtient

$$u_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \ln 2\,,$$

et on constate bien que $u_n = R_n$.

3) On a

$$\sum_{k=0}^{n} R_k = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} t^k}{1+t}\, dt\,,$$

et, en calculant la somme de la suite géométrique, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} R_k = -\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{(1+t)^2}\, dt\,.$$

Mais

$$\left| \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{(1+t)^2}\, dt \right| \leq \int_0^1 t^{n+1}\, dt = \frac{1}{n+2}\,,$$

et il en résulte que la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{(1+t)^2}\, dt \right)$ converge vers 0. Donc la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_k \right)$ converge vers

$$-\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{1}{2}\,.$$

On a donc finalement

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n = -\frac{1}{2}\,.$$

Soit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant, pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = u_n + u_n^2\,.$$

1) Montrer que
- si u_0 appartient à $]-\infty,\,-1\,[\cup]\,0,\,+\infty\,[$, alors la suite (u_n) admet $+\infty$ pour limite,
- si u_0 appartient à $[-1,\,0\,]$ alors la suite (u_n) converge vers 0.

2) On suppose que la suite (u_n) converge mais n'est pas stationnaire et on pose $v_n = -u_n$.
Quelle relation de récurrence vérifie v_n ?
Montrer que v_n est équivalent à v_{n+1} lorsque n tend vers $+\infty$.
Quel est le rayon de convergence R de la série entière de coefficient v_n ?

3) On pose

$$a_n = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_{n+1}}\,.$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ converge.
On admet le théorème de Cesàro suivant :
Si la suite (w_n) converge vers ℓ, alors la suite m_n définie par

$$m_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} w_p$$

converge aussi vers ℓ.
En déduire un équivalent de v_n.

4) Etudier la convergence de la série de terme général $v_n x^n$ lorsque $x = R$ et $x = -R$.

5) On suppose dans cette question que (u_n) tend vers l'infini. Montrer qu'alors u_n^2 est équivalent à u_{n+1} lorsque n tend vers $+\infty$.
Prouver que la suite (P_n) définie par

$$P_n = \frac{\ln u_n}{2^n}$$

a une limite finie λ que l'on ne cherchera pas à calculer.

1) Pour tout nombre réel x posons

$$f(x) = x + x^2\,.$$

On a toujours

$$f(x) - x = x^2 \geq 0$$

et le seul point fixe de f est 0. La fonction f est croissante sur $[-1/2,\,+\infty\,[$ et décroissante sur $]-\infty,\,-1/2\,]$.

Si $u_0 > 0$, la fonction f est strictement croissante sur $]0,\, +\infty\,[$, et comme

$$f(u_0) = u_1 > u_0\,,$$

la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante. Si elle convergeait, sa limite ℓ serait supérieure à u_0 et serait un point fixe de f dans $[\,0,\, +\infty\,[$, ce qui n'est pas possible. Donc (u_n) admet $+\infty$ comme limite.

Si $u_0 < -1$, on a

$$f(u_0) = u_1 > 0\,,$$

et on se trouve ramené au cas précédent.

Si u_0 appartient à $[-1/2,\, 0\,]$, la fonction f est strictement croissante sur $]-1/2,\, 0\,[$ et

$$f([-1/2,\, 0\,]) = [-1/4,\, 0\,] \subset [-1/2,\, 0\,]\,.$$

Alors, puisque

$$f(u_0) = u_1 > u_0$$

la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite strictement croissante de l'intervalle $[-1/2,\, 0\,]$. Elle converge vers l'unique point fixe de f dans $[-1/2,\, 0\,]$ c'est-à-dire vers 0.

Si u_0 appartient à $[-1,\, -1/2\,]$, le nombre $f(u_0)$ se trouve dans $[-1/4,\, 0\,]$ et on est ramené au cas précédent.

2) La suite est stationnaire lorsque $u_0 = 0$ et lorsque $u_0 = -1$. Donc on suppose que u_n appartient à l'intervalle $]-1,\, 0\,[$, c'est-à-dire que $v_0 = -u_0$ appartient à $]\,0,\, 1\,[$. Dans ce cas v_n n'est jamais nul et la suite (v_n) décroit et converge vers 0.

On a

$$v_{n+1} = -u_{n+1} = -u_n - u_n^2 = v_n - v_n^2\,.$$

On obtient alors

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - v_n\,,$$

et la limite de la suite (v_{n+1}/v_n) vaut 1. On a donc

$$v_{n+1} \sim v_n\,,$$

et on en déduit que la série entière de terme général $v_n x^n$ est de rayon 1.

3) On a

$$a_n = \frac{v_{n+1} - v_n}{v_n v_{n+1}} = \frac{-v_n^2}{v_n v_{n+1}} = -\frac{v_n}{v_{n+1}}\,,$$

et la suite (a_n) converge vers -1. On a alors

$$m_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} a_p = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_{n+1}}\right)\,,$$

et d'après le théorème de Cesàro la suite (m_n) converge aussi vers -1. Alors

$$nv_{n+1} = \frac{1}{-m_n + \frac{1}{nv_1}},$$

et l'on en déduit que la suite (nv_{n+1}) converge vers 1, d'où

$$v_n \sim v_{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

4) La série de terme général $1/n$ diverge. Il résulte de l'équivalent précédent que la série de terme général v_n diverge également.

La suite (v_n) décroit et converge vers 0. Alors la série alternée de terme général $(-1)^n v_n$ est convergente d'après le critère de Leibniz (mais n'est pas absolument convergente).

5) On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n^2} = 1 + \frac{1}{u_n},$$

et puisque la suite (u_n) admet $+\infty$ pour limite, la suite (u_{n+1}/u_n^2) converge vers 1 et

$$u_{n+1} \sim u_n^2.$$

On a donc

$$u_{n+1} = u_n^2 \varepsilon_n$$

où la suite (ε_n) converge vers 1. Alors

$$\ln u_{n+1} = 2 \ln u_n + \ln \varepsilon_n,$$

d'où l'on déduit

$$P_{n+1} = P_n + \frac{\ln \varepsilon_n}{2^{n+1}},$$

ou encore

$$P_{n+1} - P_n = \frac{\ln \varepsilon_n}{2^{n+1}},$$

et comme la suite $(\ln \varepsilon_n)$ converge vers 0, elle est bornée d'où

$$P_{n+1} - P_n = O(2^{-n}).$$

Enfin la série géométrique de raison $1/2$ converge.

Il en résulte que la série de terme général $P_{n+1} - P_n$ converge ce qui équivaut au fait que la suite (P_n) converge.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note a_n le nombre de diviseurs positifs de n.
1) Montrer que
$$1 \leq a_n \leq n\,,$$
et en déduire le rayon de convergence R de la série entière de coefficient a_n.
2) Si $|x| < R$, on pose
$$S(x) = \sum_{n=}^{\infty} a_n x^n\,.$$
Montrer que
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}\,.$$

1) Tout nombre n a au moins 1 comme diviseur, et les diviseurs de n sont compris entre 1 et n, donc
$$1 \leq a_n \leq n\,.$$
Comme les séries entières de coefficients 1 et n sont de rayon 1, il en est de même de la série de coefficient a_n. Donc $R = 1$.

2) Si $|x| < 1$, on a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{1-|x|^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} |x|^{np} \right)\,,$$
et lorsque n tend vers l'infini
$$\frac{|x|^n}{1-|x|^n} \sim |x|^n\,.$$
Il en résulte que la série de terme général $\dfrac{|x|^n}{1-|x|^n}$ converge, et que la somme double de terme général x^{np} converge absolument. Alors
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} x^{np} \right)\,,$$
et l'on peut calculer cette somme en regroupant les termes de même puissance s
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} x^{np} \right) = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{\{(n,p)\,|\,np=s\}} 1 \right) x^s\,.$$
Mais $\displaystyle\sum_{\{(n,p)\,|\,np=s\}} 1$ est le nombre de façons de pouvoir écrire s comme produit de deux facteurs, c'est-à-dire le nombre de diviseurs de s. On a finalement
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{s=1}^{\infty} a_s x^s = S(x)\,.$$

Dans cet exercice, on désigne par p un nombre premier, par x un nombre réel positif et par n un nombre entier naturel non nul.

1) En décomposant en série $\left(1-\dfrac{1}{p}\right)^{-1}$, montrer que

$$\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\geq\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}\,.$$

2) En déduire, en comparant la série à une intégrale, que

$$\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\geq\ln x\,.$$

3) Montrer que

$$0<\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}-\frac{1}{p}\leq\frac{1}{2p(p-1)}\,.$$

4) En déduire que

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}>\ln\ln x-\frac{1}{2}\,.$$

Quelle est la nature de la série de terme général $1/p$ lorsque p décrit l'ensemble des nombres premiers ?

1) En utilisant le développement en série entière de $1/(1-u)$ pour $u=1/p<1$, on trouve

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^k}\,,$$

donc

$$\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=\prod_{p\leq x}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^k}\right)\,.$$

Le développement du produit de droite est la somme des inverses des nombres entiers de la forme

$$p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$$

où

$$1<p_1<p_2<\cdots<p_r\leq x$$

et k_1, $k_2\ldots k_r$ sont des entiers naturels. Il contient donc en particulier la somme des inverses de tous les nombres entiers n inférieurs à x, d'où

$$\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\geq\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}\,.$$

2) Si $n \geq 1$, on a
$$\int\limits_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}\,.$$

Donc
$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \geq \int\limits_1^{\mathrm{E}(x)+1} \frac{dx}{x} = \ln(\mathrm{E}(x)+1) \geq \ln x\,,$$

où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière du nombre x. Finalement
$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \geq \ln x\,.$$

3) En utilisant le développement en série de $-\ln(1-u)$ avec $u = 1/p < 1$, on obtient
$$\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} - \frac{1}{p} = -\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^k}\,.$$

C'est un nombre positif que l'on majore en minorant k par 2. Alors
$$\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} - \frac{1}{p} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2p^k} = \frac{1}{2p^2} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p}} = \frac{1}{2p(p-1)}\,.$$

4) Alors
$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \geq \sum_{p \leq x} \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} - \frac{1}{2} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p(p-1)}\,.$$

Mais, d'après 2),
$$\ln \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \geq \ln\ln x\,,$$

et
$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p(p-1)} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1\,.$$

On obtient donc
$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} > \ln\ln x - \frac{1}{2}\,.$$

Quand x tend vers l'infini, le membre de droite tend vers l'infini, donc la série de terme général $1/p$ diverge.

1) Soit p un entier naturel. Trouver le rayon de convergence de la série entière
$$h_p(x) = \sum_{n=p}^{\infty} \binom{2n-p}{n} \left(\frac{x}{4}\right)^n .$$
2) Identifier h_0 à une série du binôme.
3) Trouver une relation simple entre h_0 et h_1 et en déduire h_1.
4) Etablir que, pour $p \geq 1$, on a la relation
$$h_{p+1}(x) = h_p(x) - \frac{x}{4}\, h_{p-1}(x)\,,$$
et en déduire $h_p(x)$.
5) Trouver la somme et le rayon de convergence de la série entière de terme général $\binom{2n+p}{n} x^n$.
6) Si $p \geq 1$, déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction φ_p définie par
$$\varphi_p(x) = (1 - \sqrt{1-x})^p\,.$$

1) Soit R le rayon de convergence de la série entière de coefficient
$$a_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n-p}{n}\,,$$
où $n \geq p$. On obtient
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{4(n+1)(n+1-p)}{(2n-p+2)(2n-p+1)}\,,$$
et cette expression converge vers $R = 1$.

2) Si $|x| < 1$, on a
$$h_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{4}\right)^n ,$$
et ceci peut s'écrire
$$h_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\cdots 1}{(2n)\cdots 2}\, x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\,(-x)^n\,.$$
On a donc
$$h_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,.$$

3) On a aussi
$$h_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-1}{n} \frac{2n}{n} \left(\frac{x}{4}\right)^n .$$

Donc
$$h_0(x) = 1 + 2h_1(x)\,,$$
ce qui donne
$$h_1(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\,.$$
4) En utilisant les propriétés des coefficients binomiaux, on obtient
$$\begin{aligned}
h_p(x) &= \left(\frac{x}{4}\right)^p + \sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\binom{2n-p-1}{n} + \binom{2n-p-1}{n-1}\right)\left(\frac{x}{4}\right)^n\\
&= \sum_{n=p+1}^{\infty}\binom{2n-p-1}{n}\left(\frac{x}{4}\right)^n + \sum_{n=p}^{\infty}\binom{2n-p-1}{n-1}\left(\frac{x}{4}\right)^n\\
&= \sum_{n=p+1}^{\infty}\binom{2n-p-1}{n}\left(\frac{x}{4}\right)^n + \sum_{n=p-1}^{\infty}\binom{2n-p+1}{n}\left(\frac{x}{4}\right)^{n+1}\\
&= h_{p+1}(x) + \frac{x}{4}\,h_{p-1}(x)\,.
\end{aligned}$$
On obtient donc finalement
$$h_{p+1}(x) = h_p(x) - \frac{x}{4}\,h_{p-1}(x)\,.$$
Pour x fixé dans $\left]-1,\,1\right[$, la suite $(h_p(x))$ est donc une suite récurrente linéaire de polynôme caractéristique
$$P(X) = X^2 - X + \frac{x}{4}\,,$$
qui admet pour racines
$$\lambda(x) = \frac{1+\sqrt{1-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mu(x) = \frac{1-\sqrt{1-x}}{2}\,.$$
Donc
$$h_p(x) = A(x)\,\lambda(x)^p + B(x)\,\mu(x)^p\,.$$
On a
$$h_0(x) = A(x) + B(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$
et
$$h_1(x) = A(x)\lambda(x) + B(x)\mu(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{\mu(x)}{\sqrt{1-x}}\,.$$
Le système se résout et donne
$$A(x) = 0 \quad \text{et} \quad B(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,,$$
d'où
$$h_p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{2}\right)^p\,.$$

5) En posant $s = n + p$, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n+p}{n} x^n = \sum_{s=p}^{\infty} \binom{2s-p}{s-p} x^{s-p} = \frac{1}{x^p} \sum_{s=p}^{\infty} \binom{2s-p}{s} x^s = \frac{h_p(4x)}{x^p},$$

ceci pour x non nul tel que $|x| < 1/4$. On a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n+p}{n} x^n = \frac{(1-\sqrt{1-4x})^p}{2^p x^p \sqrt{1-4x}},$$

et la somme vaut 1 lorsque x est nul. La série entière est de rayon $1/4$.

6) On a

$$\varphi_p'(x) = \frac{p}{2} \frac{(1-\sqrt{1-x})^{p-1}}{\sqrt{1-x}} = p2^{p-2} h_{p-1}(x),$$

donc

$$\varphi_p'(x) = p2^{p-2} \sum_{n=p-1}^{\infty} \binom{2n-p+1}{n} \left(\frac{x}{4}\right)^n.$$

En prenant la primitive nulle en 0 on trouve

$$\varphi_p(x) = p2^{p-2} \sum_{n=p-1}^{\infty} \binom{2n-p+1}{n} \frac{x^{n+1}}{(n+1)4^n} = p2^{p-2} \sum_{n=p}^{\infty} \binom{2n-p-1}{n-1} \frac{x^n}{n4^{n-1}}.$$

1) Vérifier que la série entière de coefficient

$$a_n = \frac{1}{(n!)^2}$$

a un rayon infini.
Pour tout x réel, on pose

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

2) Déterminer les développements en série entière de $\varphi(x)^2$ et de $\varphi(x)\varphi(-x)$.
3) Montrer que

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(2\sqrt{x}\sin t)\,dt & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2\sqrt{-x}\sin t)\,dt & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

4) Montrer que pour tout $x \geq 0$

$$1 + x \leq \varphi(x) \leq \operatorname{ch}(2\sqrt{x}) .$$

Quelle est la limite de $\varphi(x)$ à $+\infty$?

5) Montrer que φ est convexe croissante positive sur $[-1, +\infty[$.

6) Trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par φ.

7) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\varphi(tx)\,dt$.

1) La limite de

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = [(n+1)!]^2$$

est infinie. Donc le rayon de la série est $+\infty$. On aurait pu comparer également à la série de l'exponentielle, puisque

$$\frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{1}{n!} .$$

On en déduit d'ailleurs que

$$|\varphi(x)| \leq e^{|x|} .$$

2) Le coefficient de x^n dans le développement de $\varphi(x)^2$ est, d'après le produit de Cauchy,

$$\sum_{p=0}^{n} a_p a_{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(p!(n-p)!)^2} = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 .$$

On remarque que

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}\binom{n}{n-p}$$

est le coefficient de x^n dans le développement du produit

$$(x+1)^n(x+1)^n = (x+1)^{2n}$$

et donc

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n} .$$

On obtient

$$\varphi(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}\binom{2n}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^4} x^n .$$

La fonction $\varphi(x)\varphi(-x)$ est paire. Le coefficient de x^{2n} dans le développement de cette fonction est, d'après le produit de Cauchy,

$$\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p a_p a_{2n-p} = \sum_{p=0}^{2n} \frac{(-1)^p}{(p!(2n-p)!)^2} = \frac{1}{(2n)!^2} \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p}^2 .$$

De manière analogue,

$$\sum_{p=0}^{2n}(-1)^p\binom{2n}{p}^2=\sum_{p=0}^{2n}(-1)^p\binom{2n}{p}\binom{2n}{2n-p}$$

est le coefficient de x^{2n} dans le développement du produit

$$(1+x)^{2n}(1-x)^{2n}=(1-x^2)^{2n}$$

et donc

$$\sum_{p=0}^{2n}(-1)^p\binom{2n}{p}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}.$$

On a donc

$$\varphi(x)\varphi(-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!^2}\binom{2n}{n}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2(2n)!}\,x^{2n}.$$

3) Notons provisoirement Φ la fonction définie par

$$\Phi(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\operatorname{ch}(2\sqrt{x}\sin t)\,dt & \text{si } x\geq 0\\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(2\sqrt{-x}\sin t)\,dt & \text{si } x\leq 0\end{cases}.$$

Si x est positif, on a

$$\operatorname{ch}(2\sqrt{x}\sin t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n)!}\,\sin^{2n}t\,x^n.$$

Si x est négatif, on a

$$\cos(2\sqrt{-x}\sin t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(2n)!}\,\sin^{2n}t\,(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n)!}\,\sin^{2n}t\,x^n.$$

Si l'on pose

$$f_n(t)=\frac{4^n}{(2n)!}\,\sin^{2n}t\,x^n,$$

on a

$$|f_n(t)|\leq\frac{4^n}{(2n)!}|x|^n,$$

et la série de fonctions continues de terme général f_n converge normalement sur $[\,0,\,\pi/2\,]$. On peut donc intervertir les sommations et, quel que soit x réel, on a

$$\Phi(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n)!}\,I_{2n}\,x^n,$$

où
$$I_{2n}=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}t\,dt\,.$$
Pour $n\geq 1$, cette intégrale de Wallis se calcule en intégrant par parties. Si l'on pose
$$u(t)=\sin^{2n-1}t\quad\text{et}\quad v'(t)=\sin t\,,$$
on a alors
$$u'(t)=(2n-1)\cos t\sin^{2n-2}t\quad\text{et}\quad v(t)=-\cos t\,,$$
et donc
$$\begin{aligned}I_{2n}&=\Big[-\cos t\sin^{2n-1}t\Big]_0^{\pi/2}+(2n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin^{2n-2}t\,dt\\&=(2n-1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 t)\sin^{2n-2}t\,dt\\&=(2n-1)I_{2n-2}-(2n-1)I_{2n}\,.\end{aligned}$$
On en déduit la relation de récurrence
$$2nI_{2n}=(2n-1)I_{2n-2}\,,$$
avec de plus
$$I_0=\int_0^{\pi/2}dt=\frac{\pi}{2}\,.$$
On a alors
$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\,I_{2n-2}\,,$$
d'où l'on déduit
$$I_{2n}=\frac{(2n-1)\cdots 1}{(2n)\cdots 2}\,\frac{\pi}{2}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{\pi}{2}\,.$$
Finalement
$$\Phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n)!}\,\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\,x^n=\varphi(x)\,.$$
4) Si x est positif, la série de terme général $x^n/(n!)^2$ est à termes positifs, donc $\varphi(x)$ est supérieur aux sommes partielles de la série. En particulier
$$\varphi(x)\geq 1+x\,,$$
ce qui montre que
$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty\,.$$

Dans l'intégrale, on peut majorer $\sin t$ par 1. Alors comme la fonction cosinus hyperbolique est croissante sur $[\,0,\,+\infty\,[$, on a

$$\varphi(x) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \mathrm{ch}(2\sqrt{x})\,dt = \mathrm{ch}(2\sqrt{x})\,.$$

5) Si x est positif, la série de terme général $x^n/(n!)^2$ est à termes positifs, il est résulte que $\varphi(x)$ et ses dérivées sont positives.

On montre facilement par récurrence, que pour tout entier naturel p,

$$\varphi^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+p)!n!}\,,$$

Posons

$$u_n(x) = \frac{x^n}{(n+p)!n!}\,.$$

Si x appartient à l'intervalle $[\,-1,\,0\,]$, on a, pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1}(x)| = \frac{|x|}{(n+p+1)(n+1)}\,|u_n(x)| \leq |u_n(x)|\,.$$

La série de terme général $u_n(x)$ est alors une série alternée, et $\varphi^{(p)}(x)$ est du signe de son premier terme qui vaut $1/p!$.

En particulier $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ sont positifs et φ est convexe, croissante, positive sur $[\,-1,\,+\infty\,[$.

6) On a tout d'abord

$$x\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n-1)!}\,,$$

puis en dérivant cette expression

$$x\varphi''(x) + \varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{((n-1)!)^2} = \varphi(x)\,.$$

Donc φ est solution de l'équation différentielle

$$xy'' + y' - y = 0\,.$$

7) Si l'on pose, pour x réel fixé,

$$\varphi_n(t) = e^{-t}t^n\frac{x^n}{(n!)^2}\,,$$

on obtient une suite de fonctions continues sur $[\,0,\,+\infty\,[$, et

$$e^{-t}\varphi(tx) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t}t^n\frac{x^n}{(n!)^2}\,.$$

La série converge donc simplement et la somme est continue.

D'autre part, sachant que

$$\int_0^\infty e^{-t} t^n \, dt = n!\,,$$

(ce qui se retrouve facilement en intégrant par parties), on obtient

$$\int_0^\infty e^{-t} t^n \frac{|x|^n}{(n!)^2} \, dt = \frac{|x|^n}{n!}\,,$$

et la série de terme général $|x|^n/n!$ converge.

Il résulte alors du théorème d'intégration terme à termes que

$$\int_0^\infty e^{-t} \varphi(tx) \, dt = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-t} t^n \frac{x^n}{(n!)^2} \, dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} = e^x\,.$$

Nombres de Stirling de deuxième espèce.
1) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n, on note

$$f_0(X) = 1\,,\ f_1(X) = X \text{ et, si } 2 \le k \le n,\ f_k(X) = X(X-1)\cdots(X-k+1)\,.$$

On obtient ainsi une base $(f_0, f_1, \cdots, f_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Il existe alors des nombres $S(n,k)$ (nombres de Stirling de deuxième espèce) tels que, si $0 \le k \le n$,

$$X^n = \sum_{k=0}^n S(n,k) f_k(X)\,.$$

1.a Pour tout $n \ge 0$, calculer $S(n,0)$ et $S(n,n)$. Pour tout $n \ge 1$, calculer $S(n,1)$.
1.b Vérifier que, si $k \ge 0$, on a l'égalité

$$X f_k(X) = f_{k+1}(X) + k f_k(X)\,,$$

et en déduire que, si $n \ge 1$, et $1 \le k \le n$,

$$S(n+1,k) = kS(n,k) + S(n,k-1)\,.$$

1.c Soit, pour $n \ge 1$, la propriété (H_n) suivante :
« si $0 \le k \le n$ on a $0 \le S(n,k) \le 2^{n-1} k^n$ » .
Montrer par récurrence que, pour tout $n \ge 1$, la propriété (H_n) est vraie.

2) Si $p \geq 1$, on considère la série entière

$$h_p(x) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{S(n,p)}{n!}\, x^n \,.$$

2.a Montrer que la série converge pour tout x réel. Que vaut $h_1(x)$? Que vaut $h_p(0)$?
2.b Montrer que, si $p \geq 1$, la fonction h_{p+1} est la solution de l'équation différentielle linéaire

$$y' - (p+1)y = h_p \,,$$

vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.
En déduire par récurrence, en résolvant l'équation différentielle précédente, que, si $p \geq 1$, on a pour tout x réel

$$h_p(x) = \frac{1}{p!}\,(e^x - 1)^p \,.$$

2.c En développant $(e^x - 1)^p$ par la formule du binôme, et en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle, montrer que, si $n \geq 1$ et $1 \leq p \leq n$,

$$S(n,p) = \frac{1}{p!} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n \,.$$

En déduire que lorsque n tend vers l'infini, p étant fixé, on a

$$S(n,p) \sim \frac{p^n}{p!} \,.$$

3) Si $p \geq 1$, on considère la série entière

$$S_p(x) = \sum_{n=p}^{\infty} S(n,p)\, x^n \,.$$

3.a Quel est le rayon de convergence R_p de cette série ? Que vaut $S_1(x)$?
3.b Montrer que si $p \geq 2$, et $|x| < 1/p$ on a la relation

$$pxS_p(x) + xS_{p-1}(x) = S_p(x) \,.$$

En déduire la valeur de $S_p(x)$.
3.c En effectuant le produit des séries de $1/(1-x)$ et $1/(1-2x)$ trouver $S(n,2)$.

1.a Si $n = 0$, on déduit de l'égalité $1 = f_0(X)$, que $S(n,0) = 1$.

Si $n \geq 1$, on écrit

$$X^n = S(n,0) + \sum_{k=1}^{n} S(n,k) f_k(X) \,.$$

Comme $f_k(0)$ est nul si $k \geq 1$, on déduit en calculant le polynôme X^n en 0, que $S(n,0) = 0$.

Par ailleurs, le coefficient de X^n dans la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} S(n,k)f_k(X)$ est $S(n,n)$, donc $S(n,n) = 1$.

Si $n \geq 1$, on a donc

$$X^n = S(n,1)X + \sum_{k=2}^{n} S(n,k)f_k(X)\,,$$

et comme $f_k(1) = 0$ si $k \geq 2$, on en déduit $S(n,1) = 1$.

1.b Si $k \geq 0$, on a,

$$f_{k+1}(X) = (X-k)f_k(X)\,,$$

donc

$$Xf_k(X) = f_{k+1}(X) + kf_k(X)\,.$$

On obtient deux décompositions possibles de X^{n+1}. Tout d'abord

$$X^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k)f_k(X)\,,$$

mais aussi

$$X^{n+1} = X \times X^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)Xf_k(X)\,,$$

donc

$$\begin{aligned} X^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(f_{k+1}(X) + kf_k(X)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} S(n,k)f_{k+1}(X) + \sum_{k=0}^{n} S(n,k)kf_k(X)\,. \end{aligned}$$

En effectuant un changement d'indice de sommation dans la première somme

$$\begin{aligned} X^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} S(n,k-1)f_k(X) + \sum_{k=0}^{n} S(n,k)kf_k(X) \\ &= S(n,n)f_{n+1}(X) + \sum_{k=1}^{n}(S(n,k-1) + kS(n,k))f_k(X)\,. \end{aligned}$$

En identifiant les deux décompositions, on en déduit, que si $1 \leq k \leq n$,

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k)\,.$$

1.c On a $S(1,0) = 0$ et $S(1,1) = 1$, et la propriété (H_1) est bien vérifiée.

Supposons que la propriété (H_n) soit vraie. Donc, si $0 \leq k \leq n$

$$0 \leq S(n,k) \leq 2^{n-1}k^n .$$

Alors, si $1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} 0 \leq S(n+1,k) = kS(n,k) + S(n,k-1) &\leq k2^{n-1}k^n + 2^{n-1}(k-1)^n \\ &\leq 2^{n-1}k^{n+1} + 2^{n-1}k^{n+1} = 2^n k^{n+1} . \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$S(n+1,0) = 0 \quad \text{et} \quad S(n+1,n+1) = 1 \leq 2^n(n+1)^{n+1} .$$

Finalement, si $0 \leq k \leq n+1$, on a

$$0 \leq S(n+1,k) \leq 2^n k^{n+1} ,$$

ce qui montre que la propriété (H_{n+1}) est vraie.

Il en résulte que la propriété (H_n) est vraie pour tout $n \geq 1$.

2.a Si $n \geq p$, on a

$$0 \leq \frac{S(n,p)}{n!}\,|x|^n \leq \frac{2^{n-1}p^n}{n!}\,|x|^n = \frac{1}{2}\,\frac{(2p|x|)^n}{n!} .$$

Comme la série de terme général $(2p|x|)^n/n!)$ converge pour tout x réel puisque c'est la série de l'exponentielle, il en résulte que la série de terme général $S(n,p)x^n/n!$ converge absolument, donc converge, pour tout x réel. En particulier

$$h_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1 .$$

Par ailleurs on a toujours $h_p(0) = 0$.

2.b La fonction h_{p+1} est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$h'_{p+1}(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{S(n,p+1)}{(n-1)!}\,x^{n-1} = \frac{x^p}{p!} + \sum_{n=p+2}^{\infty} \frac{S(n,p+1)}{(n-1)!}\,x^{n-1} = \frac{x^p}{p!} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{S(n+1,p+1)}{n!}\,x^n .$$

En utilisant la relation de la question 1.b, on trouve

$$\begin{aligned} h'_{p+1}(x) &= \frac{x^p}{p!} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{(p+1)S(n,p+1) + S(n,p)}{n!}\,x^n \\ &= (p+1)\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{S(n,p+1)}{n!}\,x^n + \frac{x^p}{p!} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{S(n,p)}{n!}\,x^n \\ &= (p+1)\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{S(n,p+1)}{n!}\,x^n + \sum_{n=p}^{\infty} \frac{S(n,p)}{n!}\,x^n , \end{aligned}$$

ce qui donne l'égalité

$$h'_{p+1} = (p+1)h_{p+1} + h_p \,.$$

Donc h_{p+1} est la solution de l'équation différentielle

$$y' - (p+1)y = h_p \,,$$

telle que $y(0) = 0$.

On montre par récurrence la propriété (P_p) :

$$\text{« pour tout } x \text{ réel,} \quad h_p(x) = \frac{1}{p!}\,(e^x - 1)^p \text{ ».}$$

La propriété (P_1) est vraie d'après 2.a. Supposons que (P_p) soit vraie. Alors h_{p+1} est la solution, nulle en 0, de l'équation différentielle

$$y' - (p+1)y = \frac{1}{p!}\,(e^x - 1)^p \,.$$

L'équation homogène a pour solution

$$y(x) = Ke^{(p+1)x} \,,$$

où K est une constante. On utilise le procédé de la variation de la constante, en cherchant une solution de la forme

$$y(x) = K(x)e^{(p+1)x} \,.$$

On obtient

$$y'(x) = K'(x)e^{(p+1)x} + K(x)(p+1)e^{(p+1)x} \,,$$

donc l'équation

$$y'(x) - (p+1)y(x) = \frac{1}{p!}\,(e^x - 1)^p \,,$$

devient

$$K'(x)e^{(p+1)x} = \frac{1}{p!}\,(e^x - 1)^p \,,$$

ou encore

$$K'(x) = \frac{1}{p!}\,e^{-(p+1)x}(e^x - 1)^p \,,$$

et finalement

$$K'(x) = \frac{1}{p!}\,e^{-x}(1 - e^{-x})^p \,.$$

On remarque que si

$$u(x) = 1 - e^{-x} \,,$$

on a

$$K'(x) = \frac{1}{p!}\,u'(x)u(x)^p \,.$$

Alors

$$K(x) = \frac{1}{(p+1)!}\,u(x)^{p+1} + C = \frac{1}{(p+1)!}(1 - e^{-x})^{p+1} + C \,,$$

où C est une constante, et

$$y(x) = \left(\frac{1}{(p+1)!} (1 - e^{-x})^{p+1} + C \right) e^{(p+1)x} .$$

La condition $y(0) = 0$ impose $C = 0$, on obtient finalement

$$h_{p+1}(x) = \frac{1}{(p+1)!} (1 - e^{-x})^{p+1} e^{(p+1)x} = \frac{1}{(p+1)!} (e^x - 1)^{p+1} .$$

La propriété (P_{p+1}) est donc vraie. Il en résulte que la propriété (P_p) est vraie pour tout $p \geq 1$.

2.c On a

$$h_p(x) = \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} e^{kx} .$$

Puis en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle

$$h_p(x) = \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n x^n}{n!} .$$

Comme toutes les séries convergent sur $\mathbb{R}$, on peut intervertir les sommations, et

$$h_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k^n \right) \frac{x^n}{n!} .$$

Alors, par unicité du développement en série entière, on en déduit

$$S(n,p) = \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k^n ,$$

ou encore, puisque le premier terme est nul,

$$S(n,p) = \frac{1}{p!} \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k^n .$$

En mettant p^n en facteur

$$S(n,p) = \frac{p^n}{p!} \left(1 + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} \left(\frac{k}{p} \right)^n \right) .$$

Lorsque $1 \leq k \leq p-1$, les suites $((k/p)^n)_{n \geq 1}$ convergent vers 0. On en déduit donc que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} \left(\frac{k}{p} \right)^n \right) = 1 ,$$

et, lorsque n tend vers l'infini, on a donc

$$S(n,p) \sim \frac{p^n}{p!} .$$

3.a De l'équivalent obtenu dans 2.c, on déduit que la série S_p a même rayon de convergence que la série géométrique de terme général $p^n x^n$. On en déduit donc que $R_p = 1/p$.

On a

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}\,.$$

3.b La série entière $S_p(x)$ est de rayon $1/p$ et la série $S_{p-1}(x)$ est de rayon $1/(p-1)$, donc la série $pxS_p(x) + xS_{p-1}(x)$ est de rayon $1/p$. Pour $|x| < 1/p$, on a

$$\begin{aligned} pxS_p(x) + xS_{p-1}(x) &= px\sum_{n=p}^{\infty} S(n,p)x^n + x\sum_{n=p-1}^{\infty} S(n,p-1)x^n \\ &= x^p + \sum_{n=p}^{\infty}(pS(n,p) + S(n,p-1))x^{n+1}\,. \end{aligned}$$

Mais en utilisant la formule 1.b, on obtient

$$pxS_p(x) + xS_{p-1}(x) = x^p + \sum_{n=p}^{\infty} S(n+1,p)x^{n+1} = \sum_{n=p-1}^{\infty} S(n+1,p)x^{n+1}\,,$$

ce qui donne en changeant l'indice de sommation

$$pxS_p(x) + xS_{p-1} = \sum_{n=p}^{\infty} S(n,p)x^n = S_p(x)\,.$$

On a alors

$$S_p(x) = \frac{x}{1-px}\,S_{p-1}(x)\,,$$

et donc

$$S_p(x) = \frac{x}{1-px}\cdots\frac{x}{1-2x}\,S_1(x)\,.$$

On obtient finalement

$$S_p(x) = \frac{x^p}{(1-px)\cdots(1-x)}\,.$$

3.c En particulier

$$S_2(x) = \frac{x^2}{(1-2x)(1-x)}\,.$$

Si $|x| < 1/2$, on a

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n\,,$$

où

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1\,.$$

Donc
$$S_2(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)x^{n+2}\,,$$
ce qui donne, en changeant l'indice de sommation,
$$S_2(x) = \sum_{n=2}^{\infty}(2^{n-1}-1)x^n\,,$$
et donc, si $n \geq 2$,
$$S(n,2) = 2^{n-1}-1\,.$$

Nombres de Bernoulli

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}\,.$$
On admet que cette fonction est développable en série entière au voisinage de 0 sous la forme
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\,x^n\,,$$
avec un rayon $R > 0$.

1) Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2, puis montrer que a_{2n+1} est nul si $n \geq 1$.
Si $n > 0$, on pose
$$B_n = (-1)^{n+1}a_{2n}\,.$$
2) En utilisant la relation
$$\operatorname{th} ix = i\tan x$$
trouver, en fonction des nombres B_n, les développements en série entière au voisinage de 0 des fonctions suivantes (prolongées éventuellement par continuité en 0) :
$$\frac{x}{\tan x} \quad , \quad \frac{x}{\sin x} \quad , \quad \tan x\,.$$
Que peut-on dire des rayons de convergence de ces séries ? Montrer que $R \leq 2\pi$.
3) En dérivant la fonction g qui à x associe $1/\tan x$, montrer que pour $n \geq 2$ on a la formule
$$(2n+1)B_n = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}B_kB_{n-k}\,,$$
et calculer B_1, B_2 et B_3.
4) En déduire que la suite $(B_n)_{n\geq 4}$ est une suite strictement croissante de nombres rationnels dont la limite est infinie.

1) Cherchons le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f. On a

$$f(x) = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{4} + \circ(x^2)\,.$$

Donc

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \circ(x^2)\,.$$

Alors

$$f(x) + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\,\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{x}{2}\,\frac{1}{\operatorname{th}\frac{x}{2}}$$

et f est une fonction paire. Les coefficients a_{2n+1} sont donc nuls si $n \geq 1$.

Si $|x| < R$, on a alors

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n}}{(2n)!}\, x^{2n}\,.$$

2) On part de la relation

$$\frac{x}{2}\,\frac{1}{\operatorname{th}\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}}{(2n)!}\, x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{B_n}{(2n)!}\, x^{2n}\,.$$

On remplace x par $2ix$, en tenant compte de la relation

$$\operatorname{th} ix = i \tan x\,.$$

On obtient alors une série de rayon de convergence $R/2$ et, si $|x| < R/2$,

$$\frac{x}{\tan x} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} \frac{B_{2n}}{(2n)!}\, x^{2n}\,.$$

Comme la fonction précédente à une limite infinie en π, il en résulte que son rayon de convergence est inférieur à π, et donc $R \leq 2\pi$.

Pour déterminer les deux autres développements, on remarque que l'on a les relations (R)

$$\frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{2}{\tan 2x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tan x} + \tan x = \frac{2}{\sin 2x}\,.$$

En combinant ces relations on trouve tout d'abord

$$\frac{2x}{\sin 2x} = \frac{2x}{\tan x} - \frac{2x}{\tan 2x}\,.$$

Alors,

$$\frac{x}{\sin x} = 2\frac{\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} - \frac{x}{\tan x}$$

est la somme d'une série de rayon R et d'une série de rayon $R/2$. Elle est donc de rayon $R/2$ et, si $|x| < R/2$,

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!}\,(2^{2n} - 2)x^{2n}\,.$$

En soustrayant les relations (R), on obtient cette fois

$$\tan x = \frac{2}{\sin 2x} - \frac{2}{\tan 2x} = \frac{1}{2x}\left(\frac{2x}{\sin 2x} - \frac{2x}{\tan 2x}\right),$$

qui est la somme de deux séries de rayon $R/4$. Son rayon est donc supérieur ou égal à $R/4$ et, si $|x| < R/4$,

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!}\,2^{2n}(2^{2n} - 1)x^{2n-1}\,.$$

3) On a

$$-x^2 g'(x) = x^2 + \left(\frac{x}{\tan x}\right)^2 .$$

On écrit les développements en série entière des deux membres et on identifie les coefficients.

On part de

$$g(x) = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}\,\frac{B_{2n}}{(2n)!}\,x^{2n-1}\,.$$

En dérivant

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)2^{2n}\,\frac{B_{2n}}{(2n)!}\,x^{2n-2}\,,$$

d'où

$$-x^2 g'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!}\,2^{2n}(2n-1)x^{2n}\,.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{\tan x}\right)^2 &= \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!}\,2^{2n}x^{2n}\right)^2 \\
&= 1 - 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!}\,2^{2n}x^{2n}\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!}\,2^{2n}x^{2n}\right)^2 \\
&= 1 - 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!}\,2^{2n}x^{2n}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} B_k B_{n-k} 2^{2n} x^{2n}\,.
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de x^2, on obtient

$$2B_1 = 1 - 4B_1$$

d'où
$$B_1 = \frac{1}{6}\,.$$
En identifiant les coefficients de x^{2n}, pour $n \geq 2$, il vient, après simplifications,

$$(\star) \qquad (2n+1)B_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} B_k B_{n-k}\,.$$

On a alors
$$B_2 = \frac{1}{5}\binom{4}{2} B_1^2 = \frac{1}{5} \times 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{30}\,,$$
puis
$$B_3 = \frac{1}{7}\left(\binom{6}{2}B_1B_2 + \binom{6}{4}B_2B_1\right) = \frac{2}{7}\binom{6}{2}B_1B_2 = \frac{2}{7} \times 15 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{30} = \frac{1}{42}\,.$$
On remarque que les premiers termes de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ s'ordonnent en décroissant.

3) Le fait que B_n soit un nombre rationnel positif résulte immédiatement, par récurrence, de la formule $(\star)$.

Il résulte aussi de cette formule que, pour $n \geq 4$, on a

$$\begin{aligned}
B_n - B_{n-1} &= \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} B_k B_{n-k} - B_{n-1} \\
&= \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{k=2}^{n-2} \binom{2n}{2k} B_k B_{n-k} + 2\binom{2n}{2} B_1 B_{n-1} \right) - B_{n-1} \\
&= \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{k=2}^{n-2} \binom{2n}{2k} B_k B_{n-k} + \frac{1}{3}(2n^2 - 7n - 3)B_{n-1} \right)\,.
\end{aligned}$$

Pour $n \geq 4$, le trinôme $2n^2 - 7n - 3$ est strictement positif. On en déduit dans ce cas l'inégalité
$$B_n > B_{n-1}\,.$$
La suite $(B_n)_{n\geq 4}$ étant croissante, admet une limite ℓ. Si cette limite était finie, on aurait
$$\frac{B_n}{(2n)!} \sim \frac{\ell}{(2n)!}\,,$$
et puisque la série entière de coefficients $\ell/(2n)!$ est de rayon infini, il en serait de même de la série entière définissant f, ce qui est faux. Donc la suite (B_n) admet $+\infty$ pour limite.

Polynômes de Tchebychev de première espèce
Dans ce qui suit, pour tout polynôme P on pose

$$N(P) = \sup_{u \in [-1,1]} |P(u)| .$$

1) Montrer que pour tout entier n il existe un polynôme T_n de degré n et de même parité que n tel que, pour tout nombre réel t on ait

$$T_n(\cos t) = \cos nt .$$

Préciser le coefficient du terme dominant et déterminer les racines de T_n. Que vaut $N(T_n)$?
2) Donner une formule explicite de $T_n(x)$ lorsque $|x| > 1$. En déduire que

$$T_n(X) = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \binom{n}{2p} X^{n-2p}(X^2-1)^p .$$

Si t est un nombre réel, que vaut $T_n(\operatorname{ch} t)$?
3) Pour tout nombre réel u, déterminer le rayon de convergence R et la somme de la série entière de terme général $T_n(u)x^n$.
4) Calculer, pour tout couple (p,q) de $\mathbb{N}^2$, l'intégrale

$$I_{p,q} = \int_{-1}^{1} \frac{T_p(u)T_q(u)}{\sqrt{1-u^2}}\, du .$$

5) Soit (P_n) une suite de polynômes homogènes tels que P_n soit de degré n. En utilisant la question précédente, trouver une minoration de $N(P)$. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence r de la série entière de terme général $x^n/N(P_n)$?
6) Pour $n \geq 1$, déterminer les solutions de l'équation

$$T_n(x) = \pm 1 .$$

En raisonnant par l'absurde, en déduire que pour tout polynôme homogène P de degré $n \geq 1$, on a

$$N(P) \geq \frac{1}{2^{n-1}} .$$

1) La propriété est vraie si $n = 0$ et $n = 1$ en prenant

$$T_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad T_1(X) = X .$$

Remarquons que

$$\cos(n+1)t + \cos(n-1)t = 2\cos nt \cos t .$$

Si l'on suppose la propriété vraie aux ordres n et $n-1$, on a alors

$$\cos(n+1)t = 2\cos t\, T_n(\cos t) - T_{n-1}(\cos t) ,$$

et en posant

$$(\star) \qquad T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)\,,$$

on obtient un polynôme T_{n+1} tel que

$$\cos(n+1)t = T_{n+1}(\cos t)\,,$$

de plus, $2XT_n(X)$ est de degré $n+1$ et $T_{n-1}(X)$ de degré $n-1$, donc $T_{n+1}(X)$ est de degré $n+1$.

Enfin, $2XT_n(X)$ et $T_{n-1}(X)$ ont la même parité que $n-1$. Il en résulte que $T_{n+1}(X)$ a même parité que $n-1$ et donc que $n+1$.

On remarque également que le terme dominant de T_{n+1} est le double de celui de T_n. Comme celui de T_1 vaut 1, on en déduit que le terme dominant de T_n vaut 2^{n-1} si $n \geq 1$.

Le nombre $\cos nt$ est nul lorsque

$$nt = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

avec k entier, soit

$$t = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\,.$$

Posons

$$t_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}\,.$$

Lorsque k varie de 0 à $n-1$, on obtient n valeurs distinctes situées dans l'intervalle $]\,0,\,\pi\,[$ et les nombres

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

sont n nombres distincts situés dans l'intervalle $]\,-1,\,1\,[$.

Comme T_n est un polynôme de degré n tel que

$$T_n(x_k) = T_n(\cos t_k) = \cos nt_k = 0\,,$$

on obtient ainsi les n racines de T_n.

Pour finir

$$N(T_n) = \sup_{x\in[\,-1,\,1\,]} [T_n(x)| = \sup_{t\in[\,0,\,\pi\,]} |T_n(\cos t)| = \sup_{t\in[\,0,\,\pi\,]} |\cos nt| = 1\,.$$

2) Pour x fixé tel que $|x| > 1$, la suite $(T_n(x))$ est une suite récurrente linéaire, de polynôme caractéristique

$$P(X) = X^2 - 2xX + 1\,,$$

dont les racines sont

$$\lambda(x) = x + \sqrt{x^2-1} \quad \text{et} \quad \mu(x) = x - \sqrt{x^2-1}\,.$$

On a donc
$$T_n(x) = \alpha(x)(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + \beta(x)(x - \sqrt{x^2 - 1})^n \,.$$
En particulier
$$T_0(x) = \alpha(x) + \beta(x) = 1$$
et
$$T_1(x) = \alpha(x)(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \beta(x)(x - \sqrt{x^2 - 1}) = x \,.$$
On en déduit
$$\alpha(x) = \beta(x) = \frac{1}{2} \,,$$
d'où
$$2T_n(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \,.$$
En développant par la formule du binôme, on aura
$$2T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \sqrt{x^2 - 1}^{\,k} (1 + (-1)^k) \,,$$
d'où
$$T_n(x) = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \binom{n}{2p} x^{n-2p} (x^2 - 1)^p \,.$$
où $\mathrm{E}(u)$ désigne la partie entière du nombre u.

Ce calcul est vrai pour tout x tel que $|x| > 1$, mais comme le membre de droite est un polynôme, l'égalité finale est vraie en tant que polynômes et l'on a
$$T_n(X) = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \binom{n}{2p} X^{n-2p} (X^2 - 1)^p \,.$$
On a aussi
$$2T_n(\operatorname{ch} t) = (\operatorname{ch} t + \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1})^n + (\operatorname{ch} t - \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1})^n = (\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)^n + (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t)^n \,,$$
et donc
$$T_n(\operatorname{ch} t) = \frac{1}{2}\,(e^{nt} + e^{-nt}) = \operatorname{ch} nt \,.$$
3) • Si $|u| \leq 1$, on pose $u = \cos t$. On a alors
$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(u) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\cos t) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \cos nt\, x^n = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} e^{int}\, x^n \,.$$
On a
$$|\cos nt| \leq 1 \,,$$

et la série entière de coefficient $\cos nt$ est de rayon $R(u) \geq 1$. D'autre part la suite $(\cos nt)$ ne converge pas vers 0, sinon la relation

$$\cos 2nt = 2\cos^2 nt - 1$$

donnerait une contradiction. On a donc $R(u) \leq 1$ et finalement $R(u) = 1$. On peut alors sommer la série géométrique et obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(u)x^n = \operatorname{Re}\frac{1}{1-e^{it}x} = \frac{1-x\cos t}{1-2x\cos t+x^2}\,.$$

Donc, si $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(u)x^n = \frac{1-ux}{1-2ux+x^2}\,.$$

• Si $|u| > 1$, on a cette fois

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(u)x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(u+\sqrt{u^2-1})^n + (u-\sqrt{u^2-1})^n\right]x^n\,.$$

On obtient de nouveau des séries géométriques de rayons respectifs

$$\frac{1}{|u+\sqrt{u^2-1}|} = |u-\sqrt{u^2-1}| \quad \text{et} \quad \frac{1}{|u-\sqrt{u^2-1}|} = |u+\sqrt{u^2-1}|\,.$$

Le plus petit de ces deux rayons vaut

$$R(u) = |u| - \sqrt{u^2-1}\,.$$

Donc, si $|x| < R(u)$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} T_n(u)x^n &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(u+\sqrt{u^2-1})x} + \frac{1}{1-(u-\sqrt{u^2-1})x}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-ux)-x\sqrt{u^2-1}} + \frac{1}{(1-ux)+x\sqrt{u^2-1}}\right)\\
&= \frac{1-ux}{1-2ux+x^2}\,.
\end{aligned}$$

Remarque : on peut aussi trouver la somme de la série en utilisant la relation de récurrence $(\star)$.

On obtient en effet

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} T_n(u)x^n &= T_0(u) + T_1(u)x + \sum_{n=2}^{\infty} T_n(u)x^n \\
&= 1 + ux + \sum_{n=2}^{\infty}(2uT_{n-1}(u) - T_{n-2}(u))x^n \\
&= 1 + ux + 2ux\sum_{n=2}^{\infty} T_{n-1}(u)x^{n-1} - x^2\sum_{n=2}^{\infty} T_{n-2}(u)x^{n-2} \\
&= 1 + ux + 2ux\left(\sum_{n=1}^{\infty} T_{n-1}(u)x^{n-1} - 1\right) - x^2\sum_{n=2}^{\infty} T_{n-2}(u)x^{n-2} \\
&= 1 - ux + 2ux\sum_{n=0}^{\infty} T_n(u)x^n - x^2\sum_{n=0}^{\infty} T_n(u)x^n\,.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(u)x^n = \frac{1-ux}{1-2ux+x^2}\,.$$

4) En effectuant le changement de variable

$$u = \cos t$$

qui est une bijection de $[\,0,\,\pi\,]$ sur $[\,-1,\,1\,]$, on a

$$t = \arccos u \quad \text{d'où} \quad dt = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\,,$$

l'intégrale $I_{p,q}$ devient

$$\int_0^{\pi} T_p(\cos t)T_q(\cos t)\,dt\,.$$

Comme on obtient l'intégrale d'une fonction continue, cela montre que $I_{p,q}$ converge et l'on a

$$I_{p,q} = \int_0^{\pi} T_p(\cos t)T_q(\cos t)\,dt = \int_0^{\pi} \cos pt\cos qt\,dt\,.$$

Si p est distinct de q, on obtient

$$I_{p,q} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos(p+q)t + \cos(p-q)t)\,dt = 0\,.$$

Si $p = q \neq 0$, on a cette fois

$$I_{p,p} = \int_0^{\pi}\cos^2 pt\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2pt)\,dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

Enfin
$$I_{0,0} = \int_0^\pi dt = \pi\,.$$
La famille de polynômes $(T_n)_{n\geq 0}$ est donc orthogonale pour le produit scalaire
$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} \frac{P(u)Q(u)}{\sqrt{1-u^2}}\,du\,.$$

5) Si $n \geq 1$, le polynôme $T_n/2^{n-1}$ est un polynôme homogène de degré n. En le décomposant dans la base $(T_n)_{n\geq 0}$, on aura alors
$$P_n = \frac{T_n}{2^{n-1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k T_k\,,$$
d'où
$$< P_n, T_n >= \frac{< T_n, T_n >}{2^{n-1}} = \frac{I_{n,n}}{2^{n-1}} = \frac{\pi}{2^n}\,.$$
Mais
$$< P_n, T_n >\leq N(P_n)N(T_n)\ < T_0, T_0 >= \pi N(P_n)\,,$$
et l'on en déduit que
$$N(P_n) \geq \frac{1}{2^n}\,,$$
et donc
$$\frac{1}{N(P_n)} \leq 2^n\,.$$
Comme la série entière de coefficient 2^n est de rayon $1/2$, on en déduit que
$$r \geq \frac{1}{2}\,.$$

6) Les solutions de l'équation
$$T_n(x) = \pm 1$$
appartiennent à l'intervalle $[-1,\,1]$, car si $x > 1$, en posant $x = \operatorname{ch} t$, on a
$$T_n(x) = T_n(\operatorname{ch} t) = \operatorname{ch} nt > 1\,,$$
et, si $x < -1$,
$$T_n(x) = (-1)^n T_n(-x)\,,$$
donc
$$|T_n(x)| = T_n(-x) > 1\,.$$
Lorsque x appartient à $[-1,\,1]$, en posant $x = \cos t$ on a
$$T_n(x) = T_n(\cos t) = \cos nt\,.$$

et l'équation se ramène alors à
$$\cos nt = \pm 1$$
c'est-à-dire
$$nt = k\pi$$
où k est entier. Alors, les solutions cherchées sont les nombres
$$s_k = \cos\frac{k\pi}{n}\,.$$
Pour k compris entre 0 et n, on obtient $n+1$ solutions distinctes qui vérifient
$$T_n(s_k) = (-1)^k\,,$$
et ce sont les seules solutions car, si p est entier,
$$\cos\frac{(k+pn)\pi}{n} = (-1)^p\cos\frac{k\pi}{n} = \begin{cases} \cos\dfrac{k\pi}{n} & \text{si } p \text{ est pair} \\ \cos\dfrac{(n-k)\pi}{n} & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}\,.$$
Soit P un polynôme homogène de degré $n \geq 1$. Supposons que
$$N(P) < \frac{1}{2^{n-1}}\,,$$
et considérons le polynôme
$$U_n = P - \frac{T_n}{2^{n-1}}\,.$$
On a
$$U_n(s_k) = P(s_k) - \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} = (-)^{k+1}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - (-1)^k P(s_k)\right)\,.$$
Comme
$$\frac{1}{2^{n-1}} - (-1)^k P(s_k) \geq \frac{1}{2^{n-1}} - N(P) > 0\,,$$
les nombres $U_n(s_k)$ et $U_n(s_{k+1})$, pour k compris entre 0 et $n-1$, sont de signes opposés et il résulte du théorème des valeurs intermédiaires que le polynôme U_n s'annule dans chacun des intervalles $]\,s_k,\, s_{k+1}\,[$. Il possède donc n racines distinctes. Mais comme U_n et $P_n/2^{n-1}$ sont des polynômes homogènes de degré n, le polynôme U_n est de degré au plus $n-1$. Il en résulte que c'est le polynôme nul. On a donc
$$P = \frac{T_n}{2^{n-1}}\,,$$
ce qui est impossible puisque cela donnerait
$$N(P) = \frac{1}{2^{n-1}}\,.$$
On a donc en fait
$$N(P) \geq \frac{1}{2^{n-1}}\,.$$

1) Soit la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ définie, pour $n \geq 1$ par la relation de récurrence

$$(n+1)\lambda_{n+1} = 2n + 1 - \frac{n-1}{\lambda_n}\,,$$

avec $\lambda_1 = 1$.

1.a Calculer λ_2 et λ_3.

1.b Montrer que, si $n \geq 1$, on a

$$1 \leq \lambda_n \leq 2\,.$$

1.c Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n\geq 2}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge et trouver sa limite.

1.d Si $n \geq 0$, on pose

$$\beta_n = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k\,.$$

Trouver, pour $n \geq 1$, une relation de récurrence entre β_{n+1}, β_n et β_{n-1}.

2) Soit la fonction f définie sur $]-1,\,1[$ par

$$f(x) = \exp\frac{x}{1-x}\,.$$

2.a Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f et résoudre cette équation avec les séries entières.

2.b Déduire de la question 1) le rayon de convergence R de la série.

3) On pose

$$a_n = f^{(n)}(0)\,.$$

3.a Trouver, pour $n \geq 0$, une relation de récurrence entre a_{n+1}, a_n et a_{n-1}.

3.b Calculer a_n pour n compris entre 1 et 6.

3.c Démontrer la formule

$$a_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a_p (n-p+1)!\,.$$

3.d Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de nombres entiers positifs impairs.

3.e Démontrer que, pour tout entier naturel n on a,

$$1 + (n-1)n! \leq a_n\,.$$

3.f En utilisant le développement en série de l'exponentielle, trouver une formule explicite de a_n sous forme de somme et retrouver le fait que a_n est entier.

1.a) On trouve

$$\lambda_2 = \frac{3}{2}\,,\ \lambda_3 = \frac{13}{9}\,.$$

1.b) On a

$$\begin{aligned}\lambda_n - 1 &= \frac{2n-1}{n} - \frac{n-2}{n}\frac{1}{\lambda_{n-1}} - 1 \\ &= \frac{n-1}{n}\frac{\lambda_{n-1}-1}{\lambda_{n-1}} + \frac{1}{n\lambda_{n-1}}\,.\end{aligned}$$

Comme $\lambda_2 \geq 1$, de la relation précédente il résulte immédiatement par récurrence, que, pour tout $n \geq 2$, on a

$$\lambda_n \geq 1 > 0\,,$$

ce qui est encore vrai si $n = 1$.

Si $n \geq 2$ on en déduit alors,

$$\lambda_n = 2 - \frac{1}{n} - \frac{n-2}{n}\frac{1}{\lambda_{n-1}} \leq 2\,.$$

1.c) Etudions maintenant la monotonie de la suite. On a, si $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}\lambda_{n-1} - \lambda_n &= \frac{2n-3}{n-1} - \frac{n-3}{n-1}\frac{1}{\lambda_{n-2}} - \left(\frac{2n-1}{n} - \frac{n-2}{n}\frac{1}{\lambda_{n-1}}\right) \\ &= \frac{2n-3}{n-1} - \frac{2n-1}{n} - \frac{n-3}{n-1}\left(\frac{1}{\lambda_{n-2}} - \frac{1}{\lambda_{n-1}}\right) + \frac{1}{\lambda_{n-1}}\left(\frac{n-2}{n} - \frac{n-3}{n-1}\right) \\ &= \frac{-1}{n(n-1)} + \frac{n-3}{n-1}\frac{\lambda_{n-2}-\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-2}\,\lambda_{n-1}} + \frac{2}{n(n-1)}\frac{1}{\lambda_{n-1}} \\ &= \frac{2-\lambda_{n-1}}{n(n-1)\lambda_{n-1}} + \frac{n-3}{n-1}\frac{\lambda_{n-2}-\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-2}\,\lambda_{n-1}}\,.\end{aligned}$$

On en déduit que $\lambda_{n-1} - \lambda_n$ est positif si $\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1}$ est positif. Mais

$$\lambda_2 - \lambda_3 = \frac{3}{2} - \frac{13}{9} = \frac{1}{18} > 0\,,$$

et il en résulte que la suite $(\lambda_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

La suite $(\lambda_n)_{n\geq 2}$ étant décroissante minorée par 1, converge vers une limite $\ell \geq 1$. En passant à la limite dans la relation

$$\lambda_n = 2 - \frac{1}{n} - \frac{n-2}{n}\frac{1}{\lambda_{n-1}}\,,$$

on obtient

$$\ell = 2 - \frac{1}{\ell}\,.$$

Cette équation s'écrit encore

$$\ell^2 - 2\ell + 1 = 0$$

et a pour unique solution $\ell = 1$.

1.d) Pour $n \geq 1$, on écrit

$$\begin{aligned}(n+1)\beta_{n+1} &= (n+1)\lambda_{n+1}\,\beta_n \\ &= \left(2n+1-\frac{n-1}{\lambda_n}\right)\beta_n \\ &= (2n+1)\beta_n-(n-1)\frac{\beta_n}{\lambda_n} \\ &= (2n+1)\beta_n-(n-1)\beta_{n-1}\,.\end{aligned}$$

On remarquera aussi que l'on a toujours

$$\beta_n \geq 1\,.$$

2.a) Puisque

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\,f(x)\,,$$

la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(1-x)^2 f'(x)=f(x)\,,$$

avec

$$f(0)=1\,.$$

En cherchant le développement en série entière du membre de gauche, sous la forme

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\,,$$

et donc

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1}\,.$$

on obtient

$$\begin{aligned}(1-x)^2 f'(x) &= (1-2x+x^2)f'(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1}-2\sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}2nb_n x^n+\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)b_{n-1}x^n \\ &= b_1+\sum_{n=1}^{\infty}((n+1)b_{n+1}-2nb_n+(n-1)b_{n-1})x^n\,.\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on obtient, pour $n \geq 1$, la relation de récurrence

$$b_n=(n+1)b_{n+1}-2nb_n+(n-1)b_{n-1}\,,$$

d'où
$$(n+1)b_{n+1} = (2n+1)b_n - (n-1)b_{n-1}\,,$$
avec de plus
$$b_1 = b_0 = f(0) = 1\,.$$
2.b) On remarque alors que la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite $(\beta_n)_{n\geq 0}$ de la question 1. Comme de plus
$$b_0 = \beta_0 = 1 \quad \text{et} \quad b_1 = \beta_1 = 1\,,$$
il en résulte immédiatement par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, on a
$$b_n = \beta_n\,.$$
Alors b_n est strictement positif et le rayon de convergence de la série vaut
$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1}} = \frac{1}{\ell} = 1\,.$$
Remarque : le fait que la série est de rayon 1 peut également se démontrer grâce à un résultat établi dans le chapitre 6 « Exercices théoriques » (Voir page 216).

3.a) Si $n \geq 1$, on a
$$b_n = \frac{a_n}{n!}\,.$$
Alors
$$a_{n+1} = (n+1)!b_{n+1} = n!((2n+1)b_n - (n-1)b_{n-1}) = (2n+1)a_n - n(n-1)a_{n-1}\,.$$
On a donc

(1) $$a_{n+1} = (2n+1)a_n - n(n-1)a_{n-1}\,,$$

avec $a_0 = a_1 = 1$.

3.b) En utilisant cette relation de récurrence, on obtient facilement les premiers termes
$$\begin{aligned} a_0 &= 1\\ a_1 &= 1\\ a_2 &= 3\\ a_3 &= 13\\ a_4 &= 73\\ a_5 &= 501\\ a_6 &= 4\,051 \end{aligned}$$
3.c) Si l'on pose, pour x différent de 1,
$$g(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}\,,$$

on montre facilement par récurrence que

$$g^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \,.$$

Par ailleurs, on a

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} f(x) = f(x)g'(x) \,,$$

et en dérivant, grâce à la formule de Leibniz,

$$f^{(n+1)}(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f^{(p)}(x) g^{(n-p+1)}(x) \,,$$

d'où, si $x = 0$,

$$a_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a_p (n-p+1)! \,. \tag{2}$$

3.d) Une récurrence immédiate utilisant la formule (2) montre en particulier que les coefficients a_n sont des nombres entiers strictement positifs. De plus, si $n \geq 1$,

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} a_p (n-p+1)! > 0 \,,$$

et la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

La relation (1) peut encore s'écrire

$$a_{n+1} = a_n + 2na_n - n(n-1)a_{n-1} \,,$$

et comme le produit $n(n-1)$ est un nombre pair, on constate que a_{n+1} et a_n ont même parité, qui est celle de $a_1 = 1$. Tous les nombres sont donc impairs.

3.e) On constate tout d'abord que l'inégalité

$$a_n \geq (n-1)n! + 1$$

est vérifiée pour n compris entre 0 et 6, car les premières valeurs du membre de droite, sont

$$0 \,,\; 1 \,,\; 3 \,,\; 13 \,,\; 73 \,,\; 481 \,,\; 3601 \,.$$

Montrons par récurrence l'inégalité pour $n \geq 6$. Si on la suppose vraie jusqu'à l'ordre n où $n \geq 6$, on a, grâce à la formule (2),

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\geq (n+1)! + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} ((p-1)p! + 1)(n+1-p)! \\
&\geq (n+1)! + \sum_{p=1}^{n} n!(p-1)(n-p+1) + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} (n+1-p)! \\
&\geq (n+1)! + n! \sum_{p=0}^{n-1} p(n-p) + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} (n+1-p)! \\
&\geq (n+1)! + nn! \sum_{p=0}^{n-1} p - n! \sum_{p=0}^{n-1} p^2 + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} (n+1-p)! \\
&\geq (n+1)! + nn! \frac{n(n-1)}{2} - n! \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} (n+1-p)! \\
&\geq (n+1)! + \frac{(n-1)nn!}{6}(3n - (2n-1)) + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} (n+1-p)! \\
&\geq (n+1)! \frac{n^2 - n + 6}{6} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} (n+1-p)! \,.
\end{aligned}$$

Or, si $n \geq 6$, on a

$$\frac{n^2 - n + 6}{6} = n + \frac{(n-1)(n-6)}{6} \geq n \,,$$

et, par ailleurs, on a toujours,

$$\sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} (n+1-p)! \geq 1 \,.$$

On en déduit bien que

$$a_{n+1} \geq n(n+1)! + 1 \,,$$

et l'inégalité est démontrée pour tout n.

3.f) Considérons de nouveau la fonction g. Pour $n \geq 2$, on a alors

$$g^{(n-1)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \,,$$

qui admet pour série entière de rayon 1,

$$\begin{aligned}
g^{(n-1)}(x) &= \sum_{p=n-1}^{\infty} p(p-1)\cdots(p-n+2)\, x^{p-n+1} \\
&= \sum_{p=n-1}^{\infty} \frac{p!}{(p-n+1)!}\, x^{p-n+1} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+n-1)!}{p!}\, x^{p}\,.
\end{aligned}$$

On en déduit donc, pour tout x de $\,]-1,\,1\,[$,

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+n-1)!}{p!(n-1)!}\, x^p\,,$$

ou encore

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{p+n-1}{p}\, x^p\,,$$

ce qui reste vrai si $n=1$.

Alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} \binom{p+n-1}{p} x^p \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} \binom{p+n-1}{p} \frac{x^{n+p}}{n!}\,.
\end{aligned}$$

En regroupant les termes de même puissance, on obtient

$$f(x) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty}\left(s! \sum_{n+p=s} \binom{p+n-1}{p}\frac{1}{n!}\right)\, \frac{x^s}{s!}\,,$$

d'où l'on tire, pour $s \geq 1$,

$$a_s = \sum_{p=0}^{s-1} \binom{s-1}{p}\, \frac{s!}{(s-p)!}\,,$$

que l'on peut écrire encore

$$a_s = \sum_{p=0}^{s-1} p! \binom{s}{p}\binom{s-1}{p}\,,$$

ce qui montre de nouveau que a_n est entier.

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite strictement croissante des solutions positives ou nulles de l'équation

$$\tan x = x\,.$$

1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de coefficient a_n.
2) Pour x dans l'intervalle $]-R,\, R[$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

Quelle est la limite de $S(x)$ lorsque x tend vers 1 ?
3) Montrer que la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$b_n = a_n - n\pi$$

est convergente et calculer sa limite ℓ.
4) On pose

$$c_n = \ell - b_n\,.$$

Quel est le rayon de convergence R' de la série entière de coefficient c_n ?
5) Si x appartient à l'intervalle $]-R',\, R'[$ on pose

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\,.$$

Montrer que la série de terme général $(-1)^n c_n$ converge. En déduire que $T(x)$ et $S(x)$ ont une limite en -1 et que

$$\lim_{x\to -1} S(x) = -\lim_{x\to -1} T(x)\,.$$

1) Pour tout nombre réel x distinct de $\pi/2 + k\pi$ où k est entier, posons

$$f(x) = \tan x - x\,.$$

En dérivant, on obtient

$$f'(x) = \tan^2 x\,,$$

et la dérivée de la fonction f est positive. La fonction f est strictement croissante sur tout intervalle

$$I_n =]\,n\pi - \pi/2,\, n\pi + \pi/2\,[\;.$$

Comme on a

$$f(n\pi) = -n\pi \leq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to n\pi+\pi/2-0} = +\infty\,,$$

il en résulte que f s'annule une fois et une seule dans l'intervalle I_n en un point a_n qui est tel que

$$n\pi \leq a_n < n\pi + \frac{\pi}{2}\,.$$

Alors
$$a_n \sim n\pi\,,$$
et la série entière de coefficient a_n a même rayon de convergence que la série de coefficient n. On a donc $R = 1$. On remarque de plus que $a_0 = 0$.

2) Pour x dans $[\,0,\,1\,[$ on a
$$S(x) \geq \pi \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \pi x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\,.$$
Comme
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,,$$
on a en dérivant
$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}\,,$$
d'où
$$S(x) \geq \frac{x\pi}{(1-x)^2}\,.$$
On en déduit que
$$\lim_{x\to 1} S(x) = +\infty\,.$$
3) Comme a_n est compris entre $n\pi$ et $n\pi + \pi/2$, on a donc
$$0 \leq b_n < \frac{\pi}{2}\,.$$
Par ailleurs,
$$\tan b_n = \tan(a_n - n\pi) = \tan a_n = a_n\,,$$
et on en déduit
$$b_n = \arctan(\tan b_n) = \arctan a_n\,.$$
Alors puisque (a_n) est une suite croissante qui admet $+\infty$ pour limite, la suite (b_n) est croissante et admet $\pi/2$ pour limite.

4) On a donc
$$c_n = \frac{\pi}{2} - b_n = \frac{\pi}{2} + n\pi - a_n\,,$$
et (c_n) est une suite décroissante de limite nulle. De plus
$$c_n \sim \tan c_n = \frac{1}{\tan a_n} = \frac{1}{a_n} \sim \frac{1}{n\pi}\,.$$
La série entière de coefficient c_n a même rayon de convergence que la série entière de coefficient $1/n$. On a donc $R' = 1$.

5) La série de terme général $(-1)^n c_n$ est une série alternée. Elle converge donc, et d'après le théorème d'Abel

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n = \lim_{x\to -1} T(x)\,.$$

Par ailleurs, pour x dans $]-1,\,1[$, on a

$$S(x) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - T(x)\,,$$

donc

$$S(x) = \frac{\pi x}{(1-x)^2} + \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1-x} - T(x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1+x}{(1-x)^2} - T(x)\,.$$

Alors, puisque le membre de droite possède une limite finie en -1, il en est de même de celui de gauche et

$$\lim_{x\to -1} S(x) = -\lim_{x\to -1} T(x)\,.$$