Exercice 2 du TD 6 : comment trouver une base q-orthogonale avec la méthode de Gauss ?

On a vu en TD que la méthode de Gauss donnait, en notant

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{can}$$

le vecteur des composantes de $\vec{u}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$q(\vec{u}) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2$$

D'après le cours si l'on note :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= x_2 \\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= x_3 \end{aligned}$$

les formes linéaires "sous les carrés", alors **ce sont des applications linéaires linéairement indépendantes**. On a :

$$q(\vec{u}) = (f_1(x_1, x_2, x_3))^2 + (f_2(x_1, x_2, x_3))^2 + (f_3(x_1, x_2, x_3))^2$$

Méthode pour en déduire une base q-orthogonale :

Etape 1 :
On écrit le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 & = x'_1 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 & = x'_2 \\ f_3(x_1, x_2, x_3) = x_3 & = x'_3 \end{cases} \tag{1}$$

Etape 2 :
On écrit la matrice associée à ce système :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c'est-à-dire la matrice P telle que $P. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$).

Etape 3 :
On justifie que P est inversible en disant : d'après la méthode de Gauss, les formes linéaires f_i sont linéairement indépendantes, donc P est inversible.

Etape 4 :
On inverse P (méthode de Gauss pour l'inversion de matrices).

Etape 5 :
Les vecteurs colonnes de P^{-1} constituent une base q-orthogonale.

Méthode expliquée :
Explication de l'étape 3 : Pourquoi le fait que les f_i soient linéairement indépendantes garantit le fait que P soit inversible ? Parce que si P n'était pas inversible, on aurait une relation linéaire non triviale entre les lignes de P qui se traduirait, au vu de l'écriture (1), par une relation linéaire non triviale entre les f_i et contredirait le fait qu'elles sont linéairement indépendantes.

Explication des étapes 4 et 5 : On a vu que pour un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$, la méthode de Gauss donne, avec l'écriture (1) :

$$q(\vec{u}) = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 \tag{2}$$

Rappelons que le but est de trouver une base $\mathscr{B}$ q-orthogonale, c'est-à-dire une base dans laquelle, si $\overrightarrow{u}= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$,

alors $q(\overrightarrow{u})$ ne fait intervenir que des carrés , c'est-à-dire est de la forme :

$$q(\overrightarrow{u}) = a_{1,1}y_1^2 + a_{2,2}y_2^2 + a_{3,3}y_3^2$$

Or, on voit que d'après (2), si on trouve une base $\mathscr{B}$ dans laquelle

$$\overrightarrow{u}= \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

alors $\mathscr{B}$ sera bien q-orthogonale puisqu'on aura :

$$q(\overrightarrow{u}) = q(x'_1, x'_2, x'_3) = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$$

Tout revient donc à trouver une base $\mathscr{B}$ telle que :

$$\overrightarrow{u}= \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

Or, on sait que :

$$\overrightarrow{u}= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\text{can}}$$

Et par construction de P dans l'étape 2, on a :

$$P.M_{\text{can}}(\overrightarrow{u}) = M_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u})$$

Donc, d'après une formule du cours :

$$P = P_{\mathscr{B},\text{can}}$$

Donc P est inversible et :

$$P^{-1} = P_{\text{can},\mathscr{B}}$$

Donc P^{-1} a pour colonne les composantes des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans la base canonique.
Ceci justifie les étapes 4 et 5.