

# Chapitre 1: Algèbre Linéaire

Mathématiques 3, 2016

## VI. Réduction des endomorphismes

## VI. 1. Introduction

## Rappel

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- Une application linéaire de  $E$  dans  $E$  est appelée un **endomorphisme**.
- L'espace vectoriel des endomorphismes est noté  **$End(E)$** .

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie et  $f \in \text{End}(E)$ . On se fixe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ .

On considère la matrice  $M_{\mathcal{B}}(f)$  associée à  $f$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$ .

Si  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  et si les composantes de chaque  $f(\vec{e}_j)$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont

$$f(\vec{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

alors

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

## Exemple

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + 2y, -x + 4y).$$

Considérons  $\mathbb{R}^2$  muni de la base canonique  $Can = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Alors

$$f(\vec{e}_1) = f(1, 0) = (1, -1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{Can},$$

$$f(\vec{e}_2) = (0, 1) = (2, 4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{Can}.$$

Donc

$$M_{Can}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si on considère maintenant  $\mathbb{R}^2$  muni de la base  $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$  où

$$\vec{u} = (2, 1), \quad \vec{v} = (1, 1)$$

alors

$$f(\vec{u}) = f(2, 1) = (4, 2) = 2\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$f(\vec{v}) = f(1, 1) = (3, 3) = 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

et donc

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On voit que les deux matrices de  $f$ , par rapport aux différentes bases  $\mathcal{C}_{an}$  et  $\mathcal{B}$

$$M_{\mathcal{C}_{an}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sont très différentes.

La dernière matrice est plus *simple*.



La matrice associée à un endomorphisme  $f$  dépend de la base choisie : pour deux bases  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ , les matrices  $M_{\mathcal{B}_1}(f)$ ,  $M_{\mathcal{B}_2}(f)$  ne sont pas forcément identiques.

L'objectif de la **réduction d'un endomorphisme**, c'est de trouver une base  $\mathcal{B}$  dans laquelle  $M_{\mathcal{B}}(f)$  soit **la plus simple possible**.

Les matrices les plus simples sont les matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Elles sont simples : la somme, la multiplication, la puissance  $n$ -ième, ... etc, se ramène à des opérations simples.

## Exemple

Si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p^n \end{pmatrix}.$$

## VI.2. Définition, propriétés

## Définition

On dit d'un endomorphisme  $f$  qu'il est **diagonalisable**, s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $M_{\mathcal{B}}(f)$  est **diagonale** :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

## Exemple

Reprenons l'exemple précédent

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + 2y, -x + 4y).$$

Alors, dans la base  $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$  où

$$\vec{u} = (2, 1), \quad \vec{v} = (1, 1)$$

la matrice de  $f$  est

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc  $f$  est diagonalisable.

On définit maintenant la diagonalisation d'une matrice en utilisant son application linéaire associée ...

### Définition

On dit d'une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qu'elle est **diagonalisable**, si l'application linéaire qui lui est associée est diagonalisable.

Rappel : si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors l'application linéaire  $f_A$  associée à  $A$  est définie par :

$$f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f_A(x_1, x_2, \dots, x_n) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

## Définition

On dit que la matrice carrée  $A$  est **semblable** à  $B$  s'il existe une matrice inversible  $P$  tel que  $A = PBP^{-1}$ .

## Propriété

Une matrice  $A$  est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.



## Preuve

Supposons que  $A$  est diagonalisable. Soit  $\mathcal{B}$  la base dans laquelle la matrice de l'application linéaire associée  $f_A$  est une matrice diagonale  $D$ . Alors

$$A = PDP^{-1}$$

où  $P = P_{Can, \mathcal{B}}$  est la matrice de passage de la base canonique  $Can$  à  $\mathcal{B}$ . Donc  $A$  est semblable à une matrice diagonale.

Inversement, supposons que  $A = PDP^{-1}$  où  $D$  est diagonale et  $P$  est inversible.

On prend pour  $\mathcal{B}$  la famille  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  où  $\vec{e}_i$  est le  $i$ -ième vecteur colonne de la matrice  $P$ . Comme  $P$  est inversible,  $\det(P) \neq 0$  et donc  $\mathcal{B}$  est une famille libre et une base de  $\mathbb{R}^n$ . Donc  $P$  est la matrice de passage de  $Can$  à  $\mathcal{B}$ . Donc  $D$  est la matrice de  $f_A$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

## Remarque (en pratique)

Diagonaliser une matrice **carrée**  $A$  revient donc à trouver une matrice diagonale  $D$  et une matrice inversible  $P$  tel que  $A = PDP^{-1}$ . On cherche une base  $\mathcal{B}$ , dans laquelle  $A$  est représentée par une matrice diagonale  $D$  et on prend  $P$  la matrice de passage de la base canonique à  $\mathcal{B}$ .

On verra plus loin la méthode qu'on doit appliquer en pratique pour trouver une telle matrice diagonale  $D$  ...

## VI. 3. Vecteurs propres, valeurs propres

## Définition (Vecteurs propres, valeurs propres)

Soit  $f \in \text{End}(E)$ .

- Un **vecteur**  $\vec{u} \in E$  est un **vecteur propre** de  $f$  si :
  - $\vec{u} \neq \vec{0}$ ,
  - il existe un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ .
- Un **scalaire**  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre** de  $f$  s'il existe  $\vec{u} \in E$  tels que  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ .
- Si  $\vec{u}$  est un vecteur propre de  $f$ , l'unique scalaire  $\lambda$  vérifiant  $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$  est appelé la **valeur propre associée à  $\vec{u}$** .

On définit les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices, en utilisant les applications linéaires associées.

- Un vecteur  $\vec{u} \in E$  est un **vecteur propre** de  $A$  s'il est pour l'application linéaire associée.
- De même, un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre** de  $A$  si elle l'est pour l'application linéaire associée.

Cela revient à dire :

- Un vecteur  $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  est un **vecteur propre** de  $A$  si  $\vec{u} \neq 0$  et s'il existe un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que :

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

- De même, un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre** de  $A$  s'il existe  $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tels que  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

## Proposition

L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable, si et seulement si, il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ .

## Preuve

Si  $f$  est diagonalisable, alors il existe une base  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  de  $E$  telle que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Donc pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $f(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}_i$ . D'où  $\vec{u}_i$  est un vecteur propre.

Réciproquement, si  $E$  admet une base  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  formée de vecteurs propres de  $f$ , alors pour tout  $1 \leq i \leq n$ , il existe  $\lambda_i$  tel que  $f(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}_i$ .

Donc

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et  $f$  est diagonalisable. □



La traduction de la proposition pour les matrices :

### Proposition

Une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable ssi elle possède  $n$  vecteurs propres formant une base de  $\mathbb{K}^n$ .

## VI. 4. Sous-espaces propres

## Rappel

Soient  $U$  et  $V$  deux s.e.v du  $\mathbb{K}$ -e.v  $E$ .

- On appelle **somme** de  $U$  et  $V$  l'ensemble défini par

$$U + V = \{\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} \in U, \vec{v} \in V\}.$$

- On dit que la somme  $U + V$  est **directe** si  $U \cap V = \{\vec{0}\}$ .
- On dit du s.e.v  $F$  qu'il est la **somme directe** de  $U$  et  $V$  si
  - $F = U + V$ ;
  - $U \cap V = \{\vec{0}\}$ .

On écrit  $F = U \oplus V$ .

Plus généralement, soient  $U_1, \dots, U_m$ , des s.e.v de  $E$ . On dit que  $E$  est la **somme directe** de  $U_1, \dots, U_m$  et on écrit  $E = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_m$  si :

- $E = U_1 + U_2 + \dots + U_m = \{\vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_m \mid \vec{u}_i \in U_i\}$ ,
- pour tout  $\vec{u}_1 \in U_1, \vec{u}_2 \in U_2, \dots, \vec{u}_m \in U_m$  :  
si  $\vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_m = \vec{0}$  alors  $\vec{u}_i = \vec{0}$  pour tout  $1 \leq i \leq m$ .

## Propriété

Soient  $U_1, \dots, U_m$ , des s.e.v de  $E$ . Pour chaque  $1 \leq i \leq m$ , soit  $\mathcal{B}_i$  une base de  $U_i$ . Alors  $E$  est la somme directe de  $U_1, \dots, U_m$ , si et seulement si,  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_m$  est une base de  $E$ .

## Définition

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  et soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ . On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre  $\lambda$  de  $f$ , le sous-espace vectoriel

$$E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}\}.$$

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ , on définit d'une façon similaire le **sous-espace propre** associé à la valeur propre  $\lambda$  de  $A$

$$E_\lambda(A) = \{\vec{u} \in E \mid A\vec{u} = \lambda\vec{u}\}.$$

## Proposition

L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable, si et seulement si,  $E$  est somme directe de ses sous-espaces propres.

Autrement dit, si  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  sont les valeurs propres de  $f$ , deux à deux distinctes,  $f$  est diagonalisable si et seulement si

$$E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_m}(f).$$

## Corollaire

Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  sont les valeurs propres de  $f$ , deux à deux distinctes,  $f$  est diagonalisable si et seulement si

$$\dim(E) = \dim(E_{\lambda_1}(f)) + \dots + \dim(E_{\lambda_m}(f)).$$

## Corollaire

Si  $\dim(E) = n$  et  $f$  admet  $n$  valeurs propres distinctes, alors  $f$  est diagonalisable.



## VI. 5. Polynôme caractéristique

## Définition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Soit

$$P_A(X) = \det(A - XI_n).$$

Alors  $P_A(X)$  est un polynôme de degré  $n$ , appelé le **polynôme caractéristique de  $A$** .

## Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} A - XI_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - X & 3 \\ 4 & 2 - X \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1 - X & 3 \\ 4 & 2 - X \end{vmatrix} = (1 - X)(2 - X) - 12 = X^2 - 3X - 10.$$

Soit  $f \in \text{End}(E)$ . Soient  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  deux bases de  $E$ . Alors

$$M_{\mathcal{B}_1}(f) = P^{-1}M_{\mathcal{B}_2}(f)P$$

où  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}_2$  à  $\mathcal{B}_1$ . On a

$$\begin{aligned}\det(M_{\mathcal{B}_1}(f) - XI_n) &= \det(P^{-1}M_{\mathcal{B}_2}(f)P - XI_n) \\ &= \det(P^{-1}(M_{\mathcal{B}_2}(f) - XI_n)P) = \det(M_{\mathcal{B}_2}(f) - XI_n).\end{aligned}$$

Cela permet de définir :

### Définition

Soit  $f \in \text{End}(E)$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . On définit le **polynôme caractéristique** de  $f$  par :

$$P_f(X) = \det(M_{\mathcal{B}}(f) - XI_n).$$

(Donc il ne dépend pas de la base  $\mathcal{B}$ ).

## Proposition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , si et seulement si,  $\lambda$  est racine du polynôme caractéristique de  $A$ .

## Preuve

- Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , alors il existe  $\vec{u}$  avec  $\vec{u} \neq \vec{0}$  tel que  $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ . Donc  $(A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0}$ . Donc  $A - \lambda I_n$  n'est pas inversible et donc  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ .
- Si  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ , alors  $A - \lambda I_n$  n'est pas inversible et donc il existe  $\vec{u}$  avec  $\vec{u} \neq \vec{0}$  tel que  $(A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0}$  et donc  $\vec{u} \neq \vec{0}$  tel que  $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ .  
Donc  $\lambda$  est une valeur propre.



## Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1 - X & 0 \\ 5 & 2 - X \end{vmatrix} = (1 - X)(2 - X).$$

Donc les valeurs propres de  $A$  sont 1 et 2.

## Rappel sur les polynômes

- Une racine  $\lambda$  d'un polynôme  $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ , est une **racine de multiplicité  $m$**  si  $(X - \lambda)^m$  divise  $P(X)$  mais  $(X - \lambda)^{m+1}$  ne divise pas  $P(X)$ .
- Un polynôme  $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ , de degré  $n$ , est dit **scindé dans  $\mathbb{K}[X]$** , s'il peut s'écrire sous la forme

$$P(X) = a(X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_p)^{m_p}$$

où  $m_i \in \mathbb{N}^*$ ,  $a \in \mathbb{K}^*$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  (et  $m_1 + \cdots + m_p = n$ ).

## Exemple

(1) Soit

$$P(X) = X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Alors

$$P(X) = (X - 1)^2(X - 3).$$

La multiplicité de la racine  $\lambda_1 = 1$  est 2 et la multiplicité de la racine  $\lambda_2 = 3$  est 1. On voit aussi que  $P$  est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$  mais aussi dans  $\mathbb{C}[X]$ .

(2) Le polynôme  $P(X) = X^2 + X + 1$  n'est pas scindé dans  $\mathbb{R}[X]$  car il n'admet pas de racine réelle. Par contre il est scindé dans  $\mathbb{C}[X]$  :

$$P(X) = (X - j)(X - \bar{j}) \text{ où } j = e^{i\pi/3}.$$



## Définition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $A$ .

- La **multiplicité algébrique** de  $\lambda$  est la multiplicité de  $\lambda$  comme racine de  $P_A(X)$ .
- La **multiplicité géométrique** de  $\lambda$  est la dimension du sous-espace propre  $E_\lambda(A)$ .

## VI. 6. Diagonalisation

## Théorème (CNS pour la diagonalisation)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $A$  est diagonalisable si et seulement si les propriétés suivantes sont satisfaites :

- Le polynôme caractéristique  $P_A(X)$  est scindé dans  $\mathbb{K}[X]$  : dans ce cas

$$P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_p)^{m_p}$$

où  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont les valeurs propres ;  $m_i$  est la multiplicité algébrique de  $\lambda_i$ .

- Pour chaque valeur propre  $\lambda_i$ , sa multiplicité algébrique coïncide avec sa multiplicité géométrique :  $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = m_i$ .

- On calcule le polynôme caractéristique  $P_A(X)$ .
- On cherche les racines de  $P_A(X)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ , et les multiplicités algébriques  $m_1, \dots, m_p$ .
  - Si  $P_A(X)$  n'est pas scindé, alors  $A$  n'est pas diagonalisable.
  - Si  $P_A(X)$  est scindé, on cherche les bases des sous-espaces propres  $E_{\lambda_i}(A)$ . Si pour chaque  $i$ ,  $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = m_i$ , alors  $A$  est diagonalisable :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_p & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

où chaque  $\lambda_i$  est répété  $m_i$ -fois.

Dans ce cas, si  $\mathcal{B}_i$  est une base de  $E_{\lambda_i}(A)$ , alors  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  formée de vecteurs propres de  $A$ . On a alors  $A = PDP^{-1}$  où  $P$  est la matrice de passage de la base canonique à  $\mathcal{B}$ .

# Exemples

**(1)** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & -3 \\ 3 & 4-X \end{vmatrix} = X^2 - 5X + 13.$$

Le discriminant est strictement négatif et donc  $P_A(X)$  n'admet pas de racines dans  $\mathbb{R}$ . Donc  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

**(2)** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ -1 & 4-X \end{vmatrix} = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$$

et donc les valeurs propres sont  $\lambda_1 = 2$  et  $\lambda_2 = 3$ .

Comme  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $P_A(X)$  admet deux racines distinctes,  $A$  est diagonalisable (on applique ici le corollaire 2). La matrice diagonale est

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a

$$E_{\lambda_1}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\} = \text{Vect}((2, 1))$$

$$E_{\lambda_2}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\} = \text{Vect}((1, 1)).$$

En posant  $\vec{u} = (2, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, 1)$ ,  $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  formée de vecteurs propres de  $A$ . La matrice de passage de la base canonique à  $\mathcal{B}$  est

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

(3) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Polynôme caractéristique : on a

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = (4-X) \begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)(4-X)^2. \end{aligned}$$

Donc  $A$  possède deux valeurs propres : 2 de multiplicité algébrique 1 (on dit qu'elle est simple) et 4 de multiplicité algébrique 2 (on dit qu'elle est double). En plus  $P_A$  est scindé.



2. Sous-espaces propres : on a

$$E_2(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\}.$$

$$E_4(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\}.$$

En résolvant le système homogène  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , par la méthode de Gauss par exemple, on obtient

$$E_2(A) = \text{Vect}(\vec{u}), \text{ où } \vec{u} = (1, -2, 1).$$

De même

$$E_4(A) = \text{Vect}(\vec{v}, \vec{w}), \text{ où } \vec{v} = (0, 1, 0), \vec{w} = (1, 0, -1).$$

Donc la multiplicité géométrique de la valeur propre 2 est 1 et celle de la valeur propre 4 est 2.

3. Diagonalisabilité : comme  $P_A$  est scindé et la multiplicité algébrique de chaque valeur propre coïncide avec sa multiplicité géométrique,  $A$  est diagonalisable.

4. Diagonalisation : on a

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A = PDP^{-1}.$$

## VI. 7. Théorème de Cayley-Hamilton

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v et  $P \in \mathbb{K}[X]$

$$P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0.$$

Si  $f \in \text{End}(E)$ , on note  $P(f)$  l'endomorphisme de  $E$  défini par

$$P(f) = a_n f^n + \cdots + a_1 f + a_0 \text{Id}_E,$$

où  $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k\text{-fois}}$ .

De même si  $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ , alors  $P(A)$  est définie par

$$P(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I_m.$$

## Théorème (Théorème de Cayley-Hamilton)

Soit  $f \in \text{End}(E)$  (resp.  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ) et  $P_f(X)$  son polynôme caractéristique (resp.  $P_A(X)$ ). Alors  $P_f(f) = 0$  (resp.  $P_A(A) = 0$ ).

## Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1 - X & 3 \\ 4 & 1 - X \end{vmatrix} = (1 - X)^2 - 8 = X^2 - 2X - 7.$$

D'après le théorème, on a

$$A^2 - 2A - 7I_2 = \text{la matrice nulle}.$$

Cela permet par exemple de calculer  $A^{-1}$  en utilisant  $A$  et la matrice identité  $I_2$ .

On a aussi

$$A \cdot \left(\frac{1}{7}(A - 2I_2)\right) = I_2$$

et on déduit que  $A^{-1} = \frac{1}{7}(A - 2I_2)$ .

## VI. 8. Trigonalisation

## Définition

On dit d'un endomorphisme  $f$  qu'il est **trigonalisable**, s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $M_{\mathcal{B}}(f)$  est **triangulaire inférieure**

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ou **triangulaire supérieure**

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$



Traduction pour les matrices :

### Définition

Une matrice  $A$  est **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure).

## Théorème

Une matrice (ou un endomorphisme) est trigonalisable sur  $\mathbb{K}$  si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}[X]$ .

Comme tout polynôme dans  $\mathbb{C}[X]$  est scindé, on déduit

## Corollaire

Toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable.