Chapitre 1: Algèbre Linéaire

Mathématiques 3, 2016

I. Espaces vectoriels

I. 1. Définition, propriétés

Intuitivement, un espace vectoriel est un ensemble dont les éléments sont appelés des vecteurs, qu'on peut additionner et multiplier par des scalaires. Pour que ceci ait un sens, l'addition et la multiplication par des scalaires doivent satisfaire certaines propriétés.

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes.

Définition 1

Soit E un ensemble muni d'une addition

$$\begin{aligned} E \times E &\to E \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \vec{u} + \vec{v} \end{aligned}$$

et d'une multiplication par des scalaires $\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\lambda, \vec{u}) &\mapsto \lambda\vec{u} \end{aligned}$

On dit que E, muni de ces opérations, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si :

(1) $(E, +)$ est un groupe commutatif : pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$

- commutativité : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
- associativité : $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$;
- existence d'un élément neutre $\vec{0} \in E$: $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$;
- pour tout $\vec{u} \in E$, il existe un inverse $-\vec{u} \in E$: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

(2) Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}, \;\; (\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u},$$

$$\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}, \;\; 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}.$$

On appelle :

- Vecteurs les éléments de E ;
- Scalaires les éléments de $\mathbb{K}$;
- Vecteur nul le vecteur $\vec{0}$.

Exemple 1

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathbb{R}^2$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 2

Plus généralement, sur $\mathbb{R}^n$, on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathbb{R}^n$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

De même, sur $\mathbb{C}^n$, on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathbb{C}^n$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exemple 3

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ de l'addition des polynômes

$$(P+Q)(X) = P(X) + Q(X)$$

et de la multiplication par les scalaires

$$(\lambda P)(X) = \lambda P(X).$$

Alors $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Son vecteur nul est le polynôme nul. De même, l'ensemble $\mathbb{C}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients complexes est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Propriétés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

- $\lambda\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0})$;
- $\lambda(\vec{u} - \vec{v}) = \lambda\vec{u} - \lambda\vec{v}$;
- $(\lambda - \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} - \mu\vec{u}$;
- $(-\lambda) \cdot (-\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.

Propriété Importante

$$\lambda\vec{u} = \vec{0} \text{ si et seulement si } \lambda = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$$

I. 2. Sous-espaces vectoriels

Définition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si

- $\vec{0} \in F$;
- Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda\vec{u} + \vec{v} \in F$.

Exemples

(1) E et $\{\vec{0}\}$ sont des s.e.v de E.
(2) Dans $\mathbb{R}^3$, tout plan passant par l'origine est un s.e.v. Un plan $\mathcal{P}$ passant par l'origine est donné par une équation de la forme

$$ax + by + cz = 0 \text{ où } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Vérifions que $\mathcal{P}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$. Comme $\mathcal{P}$ passe par l'origine, on a $\vec{0} \in \mathcal{P}$. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}, \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On doit montrer que $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{P}$. On a

$$\lambda\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix} \text{ et } ax + by + cz = 0,\ ax' + by' + cz' = 0.$$

D'où $a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') + c(\lambda z + z') = 0$. Donc $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{P}$.

Exercice

Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit l'addition et la multiplication par les scalaires par

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x); \;\; (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

1. Vérifier que $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Soit F le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ des applications dérivables. Montrer que F est un s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Proposition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de s.e.v de E. Alors l'intersection

$$F = \bigcap_{i\in I} F_i = \{x \in E \mid x \in F_i,\ \text{pour tout } i \in I\}$$

est un s.e.v de E.

Preuve

- (Pour tout $i \in I$, $\vec{0} \in F_i$) $\Longrightarrow \vec{0} \in \bigcap_{i\in I} F_i$;
- Soient $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors pour tout $i \in I$, $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F_i$. Donc $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F$. $\square$

Corollaire 1

- Si F et G sont des s.e.v, alors leur intersection $F \cap G$ est un s.e.v.
- Si $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont des s.e.v, alors leur intersection $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$ est un s.e.v.

Définition 3

Soient U et V deux s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v E.

- On appelle somme de U et V l'ensemble défini par

$$U + V = \{\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} \in U, \vec{v} \in V\}.$$

- On dit que la somme $U + V$ est directe si $U \cap V = \{\vec{0}\}$.
- On dit du s.e.v F qu'il est la somme directe de U et V si
  - $F = U + V$;
  - $U \cap V = \{\vec{0}\}$.

  On écrit $F = U \oplus V$.

Exemple

Considérons dans $\mathbb{R}^2$ deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls et non colinéaires. Soient

$$U = \{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{\lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(U est la droite vectoriel dirigée par $\vec{u}$, V est la droite vectoriel dirigée par $\vec{v}$.)
Alors U et V sont des s.e.v de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 = U \oplus V$ (exercice).

I. 3. Familles génératrices, familles libres, bases

Définition 4

Soient $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Tout vecteur de E de la forme

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$$

où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, est appelé une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, soient

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur quelconque $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} &= x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Donc $\vec{u}$ est une combinaison linéaire de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Proposition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et $A \subseteq E$. Il existe un plus petit s.e.v de E contenant A. Il est unique et on l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par A. On le note $Vect(A)$.

Preuve

E est un s.e.v de E contenant A. Donc il existe des s.e.v de E qui contiennent A. L'intersection F de ces s.e.v est un s.e.v de E contenant A. Il est le plus petit s.e.v qui contient A. En effet, si $A \subseteq H$, où H est un s.e.v de E, alors $F \subseteq H$. $\square$

Proposition 3

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$. Alors $Vect(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A, autrement dit

$$Vect(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in A \right\}.$$

Remarque

Donc un vecteur $\vec{u} \in E$ est dans $Vect(A)$, si et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$, il existe $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in A$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$.

Exemple

Considérons dans $\mathbb{R}^2$ deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls et non colinéaires. Soient

$$U = \{\lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{\lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Alors $U = Vect(\{\vec{u}\})$ et $V = Vect(\{\vec{v}\})$.

Exercice

Montrer que $U + V = Vect(U \cup V)$.

Définition 4

Soit F un s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v E et $S \subseteq E$.

- On dit que S est une partie génératrice de F si

$$F = Vect(S).$$

- On dit que S est libre, ou que les vecteurs de S sont linéairement indépendants, si

$$\text{pour tous } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \text{ pour tous } \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in S,$$

$$\text{Si } \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_2 \vec{u}_n = \vec{0} \quad \text{alors } \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

- On dit que S est une base de E, si elle est génératrice et libre.

Théorème 1

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul admet une base. Toutes les bases ont la même cardinalité : si B_1 et B_2 sont deux bases, alors il existe une bijection entre B_1 et B_2.

Définition 5

On dit d'un $\mathbb{K}$-e.v E qu'il est de dimension finie s'il admet une base finie. Le cardinal (le nombre d'éléments) d'une base est appelé la dimension de E et est noté $\dim(E)$.

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^n$, considérons la famille $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ où pour $1 \leq i \leq n$

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ appelée la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a donc $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$-e.v des polynômes de degré inférieur ou égal à n, la famille des polynômes

$$P_0(X) = 1, P_1(X) = X, P_2(X) = X^2, \ldots, P_n(X) = X^n$$

forme une base. Donc $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.

Proposition 4

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n. Alors :

- Toute famille libre a au plus n éléments.
- Toute famille génératrice a au moins n éléments.
- Toute famille libre peut être complétée en une base de E.

Proposition 5

Soit B une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v E de dimension finie n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- B est une base de E ;
- B est une famille libre à n éléments ;
- B est une famille génératrice à n éléments.

Définition 6

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors pour tout $\vec{u} \in E$, il existe des uniques scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$$

qui sont appelés les composantes de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 6 (Formule de Grassmann)

Soient F et G deux s.e.v d'un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie. On a

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$