CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU 1
(Mercredi 12 octobre 2016)
Durée : 1 heure (16h15-17h15)

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Questions de cours. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et l'espace vectoriel

$$E = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{u} = \vec{0}\}.$$

1. Déterminer le rang de A. (2 pts)

   On utilise la propriété suivante vue en cours : le rang de A est le plus grand entier r tel que l'on puisse extraire de A une matrice carrée inversible de type (r,r). On a

   $$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

   et donc on ne peut pas extraire une matrice $(3,3)$ inversible. Par contre la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice extraite de A dont le déterminant est non nul. Donc $rg(A) = 2$.

2. Écrire l'application linéaire $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associée canoniquement à A. (1 pt)

   L'application linéaire associée canoniquement à A est l'application linéaire associée à A par rapport aux bases canoniques. On a

   $$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f_A(x,y,z) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2}y \\ 3y + 4z \\ -x + y + 2z \end{pmatrix}$$

   ou tout simplement

   $$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f_A(x,y,z) = (x + \frac{1}{2}y, 3y + 4z, -x + y + 2z).$$

3. A-t-on $E = Ker(f_A)$? Justifier votre réponse. (1 pt)

Par définition

$$Ker(f_A) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \mid f_A(\vec{u}) = \vec{0}\}$$

or $f_A(\vec{u}) = A \cdot \vec{u}$ *et donc* $E = Ker(f_A)$.

Exercice 1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ la famille de vecteurs

$$\vec{u}_1 = (1, 0, 1), \vec{u}_2 = (2, 1, 1), \vec{u}_3 = (3, 1, 0).$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. (2 pts)

Pour rappel, $\mathcal{B}$ *est une base si et seulement si* $det(\mathcal{B}) \neq 0$. *On dévelloppe suivant la première colonne*

$$det(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

et donc la famille $\mathcal{B}$ *est une base.*

2. Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{CB}}$ de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$. (1 pt)

Les colonnes de la matrice de passage $P_{\mathcal{CB}}$ *sont constituées des composantes des vecteurs de* $\mathcal{B}$ *dans la base* $\mathcal{C}$ *et donc*

$$P_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer la matrice de passage inverse $P_{\mathcal{BC}}$. (3 pts)

On sait que $P_{\mathcal{BC}} = P_{\mathcal{CB}}^{-1}$. *On utilise la méthode du pivot de Gauss pour calculer* $P_{\mathcal{CB}}^{-1}$ *:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1/2 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

et donc

$$P_{\mathcal{BC}} = P_{\mathcal{CB}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par

$$f(x, y, z) = (x + 2z, x + y + z, -y + z).$$

4. Écrire la matrice A de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. (1 pt)

On a

$f(\vec{e}_1) = f(1, 0, 0) = (1, 1, 0),\ f(\vec{e}_2) = f(0, 1, 0) = (0, 1, -1),\ f(\vec{e}_3) = f(0, 0, 1) = (2, 1, 1)$

et donc la matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Déterminer une base du noyau de f. En déduire le rang de f. (2 pts)

On a

$$Ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (0, 0, 0).\}$$

Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\vec{u} \in Ker(f) \textit{ si et seulement si } f(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$\textit{si et seulement si } \left\{ \begin{array}{c} x + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{array} \right. \quad \textit{si et seulement si } \left\{ \begin{array}{c} x = -2z \\ y = z \end{array} \right.$$

On pose $z = \lambda$ où λ est un paramètre. On obtient $x = -2\lambda$, $y = \lambda$, $z = \lambda$ et

$$Ker(f) = \{(-2\lambda, \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

D'où Ker(f)=Vect((-2,1,1)). Donc la famille constituée du vecteur $(-2, 1, 1)$ constitue une base de $Ker(f)$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\mathbb{R}^3) = rg(f) + \dim(Ker(f)).$$

D'après ce qui précède, $\dim(Ker(f)) = 1$ *et comme* $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, *on déduit*

$$rg(f) = 3 - 1 = 2.$$

6. Déterminer la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}$. (2 pts)

D'après la formule vue en cours

$$M_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} M_{\mathcal{C}}(f) P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}.$$

et donc

$$B = M_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{C}B}^{-1} A P_{\mathcal{C}B}.$$

On a

$$P_{\mathcal{C}B}^{-1}A = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathcal{C}B}^{-1}AP_{\mathcal{C}B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. (5 pts) Résoudre, suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, le système d'équations linéaires suivant :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{c} x + y + \lambda z = 1, \\ (\lambda - 1)y + z = 1, \\ x + \lambda y + (2 + \lambda)z = 4. \end{array} \right.$$

On utilise la méthode du pivot de Gauss. La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & (2+\lambda) & 4 \end{array}\right).$$

On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & (2+\lambda) & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

On distingue deux cas : $\lambda - 1 \neq 0$ et $\lambda - 1 = 0$.

- *Supposons d'abord $\lambda - 1 \neq 0$. Alors, en continuant la méthode du pivot de Gauss,*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} & \frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & \lambda - 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} & \frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} & \frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1-2\lambda \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-2\lambda+\frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

et dans ce cas le système admet une unique solution

$$x = 1 - 2\lambda + \frac{1}{\lambda - 1},\ y = \frac{-1}{\lambda - 1},\ z = 2.$$

- *Supposons maintenant* $\lambda = 1$*. Alors on obtient la matrice*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Or de la second ligne et de la troisième ligne, on déduit l'équation $z = 1$ *et l'équation* $z = 3/2$*, ce qui impossible. Donc, dans ca cas, le système n'admet pas de solutions.*