Exercice 1

2) Calculs des coefficients de Fourier a_n pour tout $n \geq 0$ et b_n pour tout $n \geq 1$. Pour les a_n, on calcule d'abord a_0 à part, puis les a_n pour tout $n \neq 0$ puisque souvent ce calcul implique de diviser par n donc on ne peut pas le faire lorsque $n = 0$. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

Et pour tout $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par définition, on a, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(-1)^n + \frac{1}{n}\right) \text{ car } cos(n\pi) = (-1)^n \\ &= \frac{(-1)^{n+1}+1}{n\pi} \end{aligned}$$

3) D'où la série de Fourier de f :

$$Sf(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}+1}{n\pi} sin(nx)$$

Comme l'expression $\frac{(-1)^{n+1}+1}{n\pi}$ est nulle pour tout n pair, on ne garde dans la dernière somme de droite que les nombres n impairs, c'est-à-dire de la forme n=2k+1 pour tout $k \geq 0$, d'où :

$$Sf(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^{(2k+1)+1}+1}{(2k+1)\pi} sin((2k+1)x)$$

et comme $(-1)^{(2k+1)+1} = (-1)^{2k+2} = 1$, on a finalement :

$$Sf(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k\geq 0} \frac{sin((2k+1)x)}{(2k+1)}$$

4) **Erreur d'énoncé** : lire : pour quelles valeurs de x a-t-on Sf(x)=f(x).
On utilise pour cela le théorème de Dirichlet.
On vérifie les hypothèses : f est dérivable (donc continue) sur $[0, 2\pi]\backslash\{0, \pi, 2\pi\}$ et dérivable (donc continue) à gauche et à droite en $0, \pi$ et 2π.

Donc d'après le théorème de Dirichlet, Sf converge simplement sur $[0, 2\pi]$ vers la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

En particulier, lorsque f est continue en $x \in [0, 2\pi]$, $g(x) = f(x)$, donc $Sf(x)$ converge vers f(x).

Explications : Dire que f est dérivable à gauche en un point x_0 signifie que la quantité :

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

admet une limite lorsque h tend vers 0, avec $h \geq 0$. Cette limite est alors appelée la dérivée à gauche de f en x_0.

Dire que f est dérivable à droite en un point x_0 signifie que la quantité :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite lorsque h tend vers 0, avec $h \geq 0$. Cette limite est alors appelée la dérivée à droite de f en x_0.

Dire que f est continue à gauche en un point x_0 signifie que $f(x)$ admet une limite lorsque x tend vers x_0, avec $x \leq x_0$. On note alors :

$$f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0, x \leq x_0} f(x)$$

Dire que f est continue à droite en un point x_0 signifie que $f(x)$ admet une limite lorsque x tend vers x_0, avec $x \geq x_0$. On note alors :

$$f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0, x \geq x_0} f(x)$$

Le fait d'être dérivable à gauche (resp. à droite) implique d'être continue à gauche (resp. à droite).

Dire que f est continue en x_0 revient à dire que f est continue à droite et à gauche et que $f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$, donc dans ce cas, on a bien $g(x_0) = f(x_0)$.

Retour à l'exercice :

On a en les points de discontinuité de f, c'est-à-dire $0, \pi, 2\pi$:

$$f(0^-) = 0 \text{ et } f(0^+) = 1 \text{ donc } Sf(0) = g(0) = \frac{1}{2},$$

$$f(\pi^-) = 1 \text{ et } f(\pi^+) = 0 \text{ donc } Sf(\pi) = g(\pi) = \frac{1}{2},$$

$$f((2\pi)^-) = 0 \text{ et } f((2\pi)^+) = 1 \text{ donc } Sf(2\pi) = g(2\pi) = \frac{1}{2}.$$

Et en les points de continuité de f c'est-à-dire pour tout x de $[0, 2\pi] \backslash \{0, \pi, 2\pi\}$:

$$Sf(x) = g(x) = f(x).$$

5) D'après un théorème du cours, comme f est 2π-périodique il en est de même de Sf. On peut donc se placer sur $[0, 2\pi]$ et déduire le reste par translation. On a alors, d'après ce qui précède :
Si $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$:

$$Sf(x) = f(x)$$

donc :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{sin((2k+1)x)}{(2k+1)} = f(x)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{sin((2k+1)x)}{(2k+1)} &= (f(x) - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2} \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -\frac{\pi}{4} & \text{si } x \in]\pi, 2\pi[\end{cases}\end{aligned}$$

Si $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$:

$$Sf(x) = \frac{1}{2}$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{sin((2k+1)x)}{(2k+1)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} = 0$$

Exercice 2

2) Pour déterminer la série de Fourier Sf de f, on calcule comme dans l'exercice précédent les coefficients de Fourier de f. On commence par calculer les a_n pour $n \geq 0$. Comme on va faire des intégrations sur $[0, 2\pi]$, on a besoin de connaître la valeur de f sur $[\pi, 2\pi]$: la courbe représentative de f sur cet intervalle est une droite passant par les points (π, π) et $(2\pi, -\pi)$, donc on a pour tout $x \in [\pi, 2\pi]$:

$$f(x) = -2x + 3\pi.$$

On commence par calculer a_0, ce que l'on fait toujours à part :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}(2x-\pi)dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-2x+3\pi)dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[x^2 - \pi x\right]_0^{\pi} + \left[-x^2 + 3\pi x\right]_{\pi}^{2\pi}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Remarquons que l'on pouvait visualiser ce résultat sur le dessin.

On calcule ensuite a_n pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}(2x-\pi)cos(nx)dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-2x+3\pi)cos(nx)dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left[2\int_0^{\pi} xcos(nx)dx - \pi\int_0^{\pi} cos(nx)dx - 2\int_{\pi}^{2\pi} xcos(nx)dx + 3\pi\int_{\pi}^{2\pi} cos(nx)dx\right]
\end{aligned}$$

On calcule séparément :

1.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} xcos(nx)dx &= \left[x\frac{sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{sin(nx)}{n}dx \text{ (intégration par parties).} \\
&= 0 - \left[-\frac{cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^n - 1}{n^2}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{2\pi} xcos(nx)dx &= \left[x\frac{sin(nx)}{n}\right]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi}\frac{sin(nx)}{n}dx \\
&= 0 - \left[-\frac{cos(nx)}{n^2}\right]_{\pi}^{2\pi} \\
&= \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n^2}
\end{aligned}$$

3.

$$\int_0^{\pi} cos(nx)dx = \left[\frac{sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = 0$$

4.

$$\int_{\pi}^{2\pi} cos(nx)dx = \left[\frac{sin(nx)}{n}\right]_{\pi}^{2\pi} = 0$$

D'où :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\left(2\times\frac{(-1)^n-1}{n^2} - 2\times\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{2(-1)^n-2}{n^2}\right) \\ &= \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2} \end{aligned}$$

On calcule ensuite les b_n pour tout $n \geq 1$. Ici, comme f est paire, on sait directement d'après le cours que $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.
D'où la série de Fourier Sf de f :

$$Sf(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2} cos(nx)$$

Comme l'expression $(-1)^n - 1$ est nulle pour tout n pair, on ne garde dans la dernière somme de droite que les nombres n impairs, c'est-à-dire de la forme n=2k+1 pour tout $k \geq 0$, d'où :

$$Sf(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{2k+1}-1}{(2k+1)^2} cos((2k+1)x)$$

Comme $(-1)^{2k+1} - 1 = -1 - 1 = -2$, on a :

$$Sf(x) = \sum_{k\geq 0} -\frac{8}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^2} cos((2k+1)x)$$

4) On va utiliser le théorème de Dirichlet : on vérifie les hypothèses.
f est dérivable (donc continue) sur $[0, 2\pi]\backslash\{0, \pi, 2\pi\}$ et est dérivable (donc continue) à gauche et à droite en $0, \pi, 2\pi$.
Donc d'après le théorème de Dirichlet, on a :

$$\forall x \in [0, 2\pi] : Sf(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \tag{1}$$

Donc en particulier, en tout x de $[0, 2\pi]$ où f est continue, on a :

$$Sf(x) = f(x) \tag{2}$$

5) L'idée est de choisir un x_0 dans $[0, 2\pi]$ tel que la série $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$ de l'énoncé apparaisse dans $Sf(x_0)$ et utiliser l'équation (**??**) (ou (**??**) si f est continue en x_0) évaluée en x_0 pour trouver la valeur de cette série. Ici, on voit que $x_0 = 0$ fait apparaître la série de l'énoncé dans l'expression de $Sf(0)$. Comme f est continue en 0, on utilise (**??**) pour obtenir :

$$Sf(0) = f(0)$$

C'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{\infty} -\frac{8}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^2} = -\pi$$

d'où :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Exercice 3

2) Comme f est impaire sur $]-\pi,\pi[$, d'après le cours, on a $a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$. On calcule ensuite b_n pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xsin(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{xcos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{cos(nx)}{n}dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi cos(n\pi)}{n} - \frac{\pi cos(-n\pi)}{n} + \left[\frac{sin(nx)}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-2\pi cos(n\pi)}{n} + 0\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-2\pi(-1)^n}{n}\right) \\
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

D'où :

$$Sf(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}sin(nx)$$

4) On va de nouveau utiliser le théorème de Dirichlet : on vérifie les hypothèses.
La fonction f est dérivable (donc continue) sur $[-\pi,\pi]\backslash\{-\pi,\pi\}$ et est dérivable (donc continue) à gauche et à droite en $-\pi$ et π. D'après le théorème de Dirichlet, on a pour tout $x \in [-\pi,\pi]$:

$$Sf(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

et en particulier pour tout x où f est continue on a :

$$Sf(x) = f(x)$$

5)L'idée est à nouveau de choisir un x_0 dans $[-\pi,\pi]$ tel que la série $\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}$ de l'énoncé apparaisse dans $Sf(x_0)$ et utiliser l'équation (**??**) (ou (**??**) si f est continue en x_0) évaluée en x_0 pour trouver la valeur de cette série. Ici, on voit que $x_0 = \frac{\pi}{2}$ fait apparaître la série de l'énoncé dans l'expression de $Sf(\frac{\pi}{2})$. Comme f est continue en $\frac{\pi}{2}$, on utilise (**??**) pour obtenir :

$$Sf(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2})$$

C'est-à-dire :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Comme l'expression $sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ est nulle pour tout n pair, on ne garde dans la dernière somme que les nombres n impairs, c'est-à-dire de la forme n=2k+1 pour tout $k \geq 0$, d'où :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(-1)^{(2k+1)+1}}{2k+1}sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Comme $(-1)^{(2k+1)+1} = (-1)^{2k+2} = 1$ et comme $sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$, on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$