CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES DE LA FICHE 12

Exercice 1. On considère l'équation de la chaleur

$$(EC) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in]0, L[, \quad \forall t > 0, \quad (1) \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in [0, L], \quad (2) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \forall t \geq 0 & \quad (3) \end{cases}$$

qui modélise le problème suivant : une barre métallique de longueur L, représentée par le segment $[0, L]$, dont la température à l'instant t au point $x \in [0, L]$ est donnée par $u(x, t)$. On cherche à déterminer u en connaissant la condition initiale (2) et les conditions aux bords (3).

On pose $D =]0, L[\times]0, +\infty[$ et on suppose que u est continue sur $\overline{D} = [0, L] \times [0, +\infty[$ et de classe C^∞ sur D. On suppose en outre que u_0 est de classe C^1 sur $[0, L]$.

1. Montrer que si la fonction u s'écrit sous la forme $u(x, t) = F(x)G(t)$, où F et G ne s'annulent pas sur D, et vérifie (1) alors F et G vérifient chacune une équation différentielle linéaire de second ordre qu'on déterminera.

   En remplaçant dans l'équation (1) *:*

   $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = F(x)G'(t) - F''(x)G(t) = 0$$

   et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que*

   $$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{G(t)} = \lambda.$$

   D'où les équations différentielles linéaires suivantes :

   $$(4) \qquad F''(x) - \lambda F(x) = 0,$$

   $$(5) \qquad G'(t) - \lambda G(t) = 0.$$

2. Résoudre ces équations différentielles en tenant compte des conditions aux bords (3).

   Les conditions aux bords (3) *donnent :*

   $$F(0) = u(0,t) = F(0)G(t) = 0, \;\; \forall t > 0,$$

   $$u(L,t) = F(L)G(t) = 0, \; \forall t > 0,$$

   et des conditions imposées sur F et G, $G(t) \neq 0$ pour tout $t > 0$, on déduit que $F(0) = F(L) = 0$. En tenant compte de ces conditions, déterminons les valeurs possibles de λ.

   Si $\lambda = 0$ alors de l'équation (4) on déduit $F''(x) = 0$ et donc $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = \alpha x + \beta$. Or $F(0) = \beta = 0$ et $F(L) = \alpha L = 0$ et donc $\alpha = \beta = 0$, ce qui est impossible car F n'est pas identiquement nulle.

Supposons $\lambda > 0$. L'équation caractéristique de (4) est $r^2 - \lambda = 0$. Les solutions sont $r = \pm\sqrt{r}$. D'où la solution générale de (4) est

$$F(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad \textit{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Des conditions $F(0) = F(L) = 0$, on déduit

$$F(0) = C_1 + C_2 = 0, \ \ F(L) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}L} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}L}$$

et donc $C_1 = C_2 = 0$, ce qui est de nouveau impossible.

Donc l'unique possibilité est $\lambda < 0$. L'équation caractéristique de (4) est $r^2 - \lambda = 0$. Les solutions sont $r = \pm\sqrt{|\lambda|}i$. D'où la solution générale de (4) est

$$F(x) = C_1 \cos(\sqrt{|\lambda|}x) + C_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}x), \quad \textit{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Des conditions $F(0) = F(L) = 0$, on déduit

$$F(0) = C_1 = 0, \ \ F(L) = C_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}L) = 0$$

et comme on doit choisir $C_2 \neq 0$, on conclut que $\sin(\sqrt{|\lambda|}L) = 0$ et donc $\sqrt{|\lambda|}L = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$. D'où $\exists k \in \mathbb{Z}^*$ tel que

$$\sqrt{|\lambda|} = \frac{k\pi}{L}$$

et finalement

$$F(x) = C \sin(\frac{k\pi}{L}x), \ C \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{Z}^*.$$

Quant à (5) sa solution générale, en tenant compte de $\lambda < 0$ et $\sqrt{|\lambda|} = \frac{k\pi}{L}$, est

$$G(t) = Ce^{\lambda t} = Ce^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t}, \ \ C \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{Z}^*.$$

Enfin

$$u(x,t) = C \sin(\frac{k\pi}{L}x)e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t}, \ \ C \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{Z}^*.$$

3. En déduire que toute fonction de la forme

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}t} \tag{4}$$

est une solution de (1) et (3) [On suppose que la série converge uniformément].

On suppose une converge uniforme, que ça soit pour la variable x ou t. Par la convergence uniforme

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n\geq 1} a_n \frac{\partial}{\partial t}(\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}t})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{n\geq 1} a_n \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}t})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{n\geq 1} a_n \Big[\frac{\partial}{\partial t}(\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}t}) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}t})\Big] = 0.$$

4. Soit $\bar{u}_0$ une fonction impaire et $2L$-périodique qui coïncide avec u_0 sur $[0, L]$. Justifier l'existence du développement en série de Fourier de $\bar{u}_0$ et donner une condition nécessaire sur a_n pour que la fonction u donnée en (4) soit solution au problème (EC).

   Comme $\bar{u}_0$ est une fonction impaire et $2L$-périodique qui coïncide avec u_0 sur $[0, L]$ et comme u_0 est de classe C^1 sur $[0, L]$ et comme $u(0) = u(L) = 0 = 0$, on conclut que $\bar{u}_0$ est continue et dérivable par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, si $S\bar{u}_0$ désigne la somme de la série de Fourier de $\bar{u}$ alors $S\bar{u}_0(x) = \bar{u}_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $\bar{u}_0$ est développable en série de Fourier.

   Comme $\bar{u}_0$ est impaire, on a

$$\bar{u}_0(x) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n \sin(n\omega x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

   et comme $\bar{u}_0$ est $2L$-périodique, $\omega = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}$ et donc

$$\bar{u}_0(x) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n \sin(\frac{n\pi}{L}x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

   En particulier

$$u_0(x) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n \sin(\frac{n\pi}{L}x),\ \forall x \in [0, L].$$

   Pour que la fonction

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}t}$$

   soit une solution au problème (EC) il faut

$$u(x, 0) = u_0(x),\ \forall x \in [0, L], \qquad (2) \quad u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \qquad (3)$$

   et donc

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sum_{n\geq 1} a_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n \sin(\frac{n\pi}{L}x).$$

   D'où $a_n = \alpha_n$ pour tout $n \geq 1$.

5. Justifier que la fonction ainsi trouvée est bien solution au problème (EC).

   Soit donc

$$\bar{u}_0(x) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n \sin(\frac{n\pi}{L}x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

   le développement en série de Fourier de $\bar{u}_0$ et

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}t}.$$

   Soit $t \geq 0$ fixé. Comme $\bar{u}_0$ est continue et de classe C^1 par morceaux, sa série de Fourier converge normalement (on utilise ici une conclusion forte du théorème de Dirichlet qui n'a pas été énoncée en cours). Comme $e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}t} \leq 1$ on a

$$\left|\alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}t}\right| \leq \left|\alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right|$$

   et donc la série $\sum_{n\geq 1} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}t}$ converge normalement. Par conséquent

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{n\geq 1} a_n \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}t}).$$

De même, en utilisant la convergence normale, on a par rapport à la variable t :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n\geq 1} a_n \frac{\partial}{\partial t}(\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}t})$$

et donc

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0.$$

Enfin, avec le choix fait, on a

$$u(x,0) = u_0(x),\ \forall x \in [0,L], \quad u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application différentiable. On pose $F(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x)$. Calculer $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}$.

Corrigé. Posons

$$a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, a(x,y,z) = x-y,\ b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, b(x,y,z) = y-z,\ \ c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, c(x,y,z) = z-x.$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x-y,y-z,z-x) \times \frac{\partial a}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial y}(x-y,y-z,z-x) \times \frac{\partial b}{\partial x}(x,y,z) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial z}(x-y,y-z,z-x) \times \frac{\partial c}{\partial x}(x,y,z) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x-y,y-z,z-x) - \frac{\partial f}{\partial z}(x-y,y-z,z-x). \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x-y,y-z,z-x) \times \frac{\partial a}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial y}(x-y,y-z,z-x) \times \frac{\partial b}{\partial y}(x,y,z) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial z}(x-y,y-z,z-x) \times \frac{\partial c}{\partial y}(x,y,z) \\
&= -\frac{\partial f}{\partial x}(x-y,y-z,z-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x-y,y-z,z-x). \\
\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x-y,y-z,z-x) \times \frac{\partial a}{\partial z}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial y}(x-y,y-z,z-x) \times \frac{\partial b}{\partial z}(x,y,z) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial z}(x-y,y-z,z-x) \times \frac{\partial c}{\partial z}(x,y,z) \\
&= -\frac{\partial f}{\partial y}(x-y,y-z,z-x) + \frac{\partial f}{\partial z}(x-y,y-z,z-x).
\end{aligned}$$

D'où

$$(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z})(x,y,z) = 0.$$

Exercice 3. Soient $f\ :\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ différentiable et $g\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=f\left(e^x\sin x,\ln(1+x^2)\right)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Corrigé. Posons

$$a:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ a(x)=e^x\sin x,\ b:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ b(x)=\ln(1+x^2).$$

Comme g est composition de fonctions différentiables, g est différentiable (sur $\mathbb{R}$). On a

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{\partial f}{\partial x}(e^x\sin x,\ln(1+x^2))\times a'(x)+\frac{\partial f}{\partial y}(e^x\sin x,\ln(1+x^2))\times b'(x)\\&=\frac{\partial f}{\partial x}(e^x\sin x,\ln(1+x^2))e^x[\sin x+\cos x]+\frac{\partial f}{\partial y}(e^x\sin x,\ln(1+x^2))\times\frac{2x}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Exercice 4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Résoudre l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

à l'aide du changement de variables $u=\frac{x+y}{2}$ et $v=\frac{x-y}{2}$.

Corrigé. On pose $f(x,y)=F(u(x,y),v(x,y))$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v})\\\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{2}(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v})\Big)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial F}{\partial u})+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial F}{\partial v})\Big)\\&=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\\&=\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\Big)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{2}(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial v})\\\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{2}(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial v})\Big)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial F}{\partial u})-\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial F}{\partial v})\Big)\\&=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y}-(\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y})\Big)\\&=\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}-(\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 F}{\partial v^2})\Big)\\&=\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\Big)\end{aligned}$$

D'où l'équation devient

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}=0.$$

En intégrant, par rapport à v, on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial u}=a(u)$$

où A est une fonction ne dépendant que de u. D'où, si A est une primitive de a, on a

$$F(u,v)=A(u)+B(v).$$

où B est une fonction ne dépendant que de v.

D'où

$$f(x,y)=A(\frac{x+y}{2})+B(\frac{x-y}{2}).$$

Exercice 5. Résoudre en utilisant le changement de variable $x = u, y = uv$ l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Corrigé. On pose $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$ où $u = x$ et $v = y/x$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial F}{\partial v}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial F}{\partial v}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial F}{\partial u}) - y\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{x^2}\frac{\partial F}{\partial v}) \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x} - y\Big(\frac{-2}{x^3}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{x^2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial F}{\partial v})\Big)\Big) \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\Big) \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \times \frac{-y}{x^2} \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$

Et donc

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = u^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2vu\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} + 2v\frac{\partial F}{\partial v} + v^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial F}{\partial v}\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial u}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{x^2}\frac{\partial F}{\partial v}\Big) \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{x^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial v} + y\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial v}\Big) \\
&= \frac{1}{x}\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\Big) \\
&= \frac{1}{x}\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

et donc

$$2xy\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2uv\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} - 2v\frac{\partial F}{\partial v} - 2v^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial v}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial v}\Big) = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial v}\Big) = \frac{1}{x}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\Big) \\
&= \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

et donc

$$y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = v^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.$$

Enfin l'équation devient

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = u^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0.$$

Comme $u \neq 0$, on conclut
$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0.$$
Par intégration, on obtient
$$F(u,v) = A(v)u + B(v)$$
où A et B sont des fonctions qui ne dépendent que de v. D'où
$$f(x,y) = A(y/x)x + B(y/x).$$

Exercice 6. En effectuant le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$, déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant
$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Corrigé. On pose $f(x,y) = F(u(x,y), v(x,y))$. On a
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v},$$
et
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}.$$
L'équation devient
$$2\frac{\partial F}{\partial v} = 0.$$
En intégrant, on obtient
$$F(u,v) = A(u)$$
où A ne depend que de u. D'où
$$f(x,y) = A(x+y),$$
où $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 7. On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$. On considère $\varphi : D \to D$ définie par
$$\varphi(x,y) = (u,v), \quad \text{avec } u = x,\ v = \frac{y}{x}.$$

1. Montrer que la fonction φ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ de D sur D ainsi que sa fonction reciproque.
2. A l'aide du changement de variables φ, résoudre l'équation aux dérivées partielles
$$x^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + xy\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y.$$
3. Quelle est la solution de l'équation qui vérifie
$$f(1,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,y) = \sin(y) \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}?$$

Corrigé.

1. Montrons que φ est bijective.
   Soient $(x,y), (x',y') \in D$ tels que $\varphi(x,y) = \varphi(x',y')$. Alors $x = x'$ et $y/x = y'/x'$ et donc $y = y'$. D'où $(x,y) = (x',y')$ et donc φ est injective.
   Soit $(a,b) \in D$. On a $\varphi(a,ab) = (a,b)$ et donc φ est injective. On conclut que φ est bijective.
   Montrons que φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Les applications $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y/x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur D. En effet, chacune d'elle admet des dérivées partielles continues sur D. Donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$.
   On a $\varphi^{-1}(x,y) = (x, xy)$ et de même φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$. Donc φ est un difféomorphisme.

2. Posons $f(x,y) = F(u,v)$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial F}{\partial v},$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial v}.$$

L'équation devient

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y} = u^2\frac{\partial F}{\partial u} = uv.$$

Comme $u \neq 0$, on déduit

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{v}{u}.$$

En intégrant l'équation différentielle précédente, on obtient

$$F(u,v) = v \ln u + C(v)$$

où $C(v)$ est une fonction qui ne dépende que de v. D'où

$$f(x,y) = \frac{y}{x}\ln x + C(\frac{y}{x}).$$

3. Cherchons la solution vérifiant

$$f(1,0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,y) = \sin y,\ \text{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

On a

$$f(1,0) = C(0) = 0,\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(1,y) = C'(y) = \sin y.$$

Donc

$$C(t) = -\cos(t) + c,\ \text{où } c \in \mathbb{R}.$$

Enfin

$$f(x,y) = \frac{y}{x}\ln x - \cos(\frac{y}{x}) + 1.$$