CONTRÔLE CONTINU FINAL

Mercredi 6 janvier 2016

Durée : 2 heures

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1. (4pts) On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x,y) = (x+3y, 3x+y).$$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{C}$. La matrice A est-elle symétrique ? (1pt)
2. Calculer les valeurs propres de A. (1pt)
3. Montrer que A est diagonalisable et expliciter une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D, ainsi qu'une matrice orthogonale P telle que $A = PDP^{-1}$ [On ne demande pas de calculer P^{-1}]. (2pts)

Exercice 2. (4pts) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (n+1)^2}, \quad n \geq 1.$$

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ? (1pt)
2. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est-elle convergente ? (2pts)
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$. (1pt)

Exercice 3. (6pts) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad n \geq 0.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(2n+1)}{(n+1)}.$$

(1pt)

2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. (1pt)
3. On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n,$$

définie sur $]-R, R[$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1-4x)y' - 2y = 0$$

et vérifie la condition initiale $y(0) = 1$ [Indication : en vérifiant la relation que doit vérifier les coefficients d'une série entière solution de (E), montrer que la série entière $f(x)$ donnée ci-dessus est solution de (E)]. (2,5pts)
4. Résoudre l'équation différentielle (E), en déduire l'expression de $f(x)$. (1,5pts)

Exercice 4. (7pts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{pour } x \in [-\pi, 0] \\ \pi - x & \text{pour } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$. Vérifier que f est paire. (1,5pts)
2. Calculer les coefficients de Fourier de f. (2pts)
3. En déduire la série de Fourier de f qu'on notera Sf. (1pt)
4. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $Sf(x) = f(x)$? (1pt)
5. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

(1,5pts)

Exercice 5. Bonus (5pts) On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y - y'' = f(x)$$

où f est la fonction 2π-périodique de l'exercice 4. On suppose que (E) admet une solution particulière y_0 paire, 2π-périodique et développable en série de Fourier :

$$y_0(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(nx).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\alpha_n = \frac{a_n}{n^2 + 1}$$

où $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$ est le développement en série de Fourier de f. (2pts)
2. En déduire la solution générale de (E). (1pt)
3. Exprimer l'énergie totale du signal représenté par y_0

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_0(x)^2 \, dx$$

comme la somme d'une série numérique. (2pts)