
Feuille d'exercices n°4
POLYNÔME MINIMAL - THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON

Exercice 1. Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes avec $a \neq b$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les matrices réelles suivantes soient diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.

1. Soit J une matrice complexe de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer J^p pour tout entier $1 \leq p \leq 4$.
   (b) En déduire que J est diagonalisable.
   (c) Montrer que I_4, J, J^2, J^3 sont linéairement indpendantes.
   (d) Déterminer le polynôme minimal de J.
   (e) Calculer les valeurs propres de J.
   (f) Diagonaliser J en exhibant la matrice de passage.

2. Soit A la matrice circulante complexe suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Exprimer A comme un polynôme en la matrice J.
   (b) Montrer que, pour tout polynôme Q, $Q(J)$ est diagonalisable et que

$$\mathrm{Spec}(Q(J)) = \{Q(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Spec}(J)\}$$

   où $\mathrm{Spec}(M)$ est l'ensemble des valeurs propres de la matrice M.
   (c) En déduire que A est diagonalisable et calculer les valeurs propres de A.
   (d) Calculer le déterminant de A.

Exercice 4. Soit n un entier suprieur ou égal 2. On considère l'application linéaire Trace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ valeurs dans $\mathbb{R}$ qui toute matrice associe la somme de ses coefficients diagonaux.

1. Déterminer l'image de la Trace et la dimension de son noyau.
2. Montrer qu'on a une somme directe :
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\text{Trace}) \oplus \text{Vect}(I_n).$$
3. Soit u l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dèfinie par
$$u(A) = A + \text{Trace}(A)\, I_n.$$
   (a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Est-il inversible ?

Exercice 5. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant
$$f^3 = 4f$$
Montrer que la trace de f est un entier pair.

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que
$$A^3 - A^2 + A - I_n = 0$$
Montrer que $det(A) = 1$.

Exercice 7. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E vérifiant
$$f^4 = f^2$$
On suppose que 1 et -1 sont valeurs propres de f. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 8. On considere la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$
Calculer son polynôme caractéristique, calculer A^2 et déduire de ces calculs et du théorème de Cayley-Hamilton l'inverse de A.

Exercice 9. Soit u un endomorphisme inversible d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que 0 ne peut pas être valeur propre de u.
2. En déduire que u^{-1} est un polynôme en u.
(Indication. On pourra utiliser le fait que le polynôme X ne divise pas le polynôme caractéristique de u.)

Exercice 10. Soient u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que la restriction de u au sous-espace F est un endomorphisme diagonalisable de F.

Exercice 11. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^3 = X$.

Exercice 12. L'objectif est de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'èquation

$$X^3 + X = 0. \tag{1}$$

Soit A une matrice non nulle satisfaisant l'équation (1).

1. Montrer que
$$\mathbb{R}^3 = \ker A \oplus \ker(A^2 + I_3).$$
2. Déterminer le polynôme minimal de A.
3. Montrer que, si x n'appartient pas $\ker A$, alors la famille (x, Ax) est libre.
4. Montrer que $\ker A$ est de dimension 1. En déduire que A est semblable la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et P le polynme de $\mathbb{K}[X]$ défini par

$$P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \ldots - a_1 X - a_0.$$

La matrice compagnon du polynôme P est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On note u l'endomorphisme de E reprsenté par la matrice A dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E fixe.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de u est $p_u = (-1)^n P$.
2. Sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, montrer que le polynôme P est annulateur de u.
3. En déduire que P est le polynôme minimal de u.

Soient v un endomorphisme de E et x un vecteur non nul de E. Soit p le plus grand entier tel que la famille $\mathcal{B}_x = (x, v(x), \ldots, v^p(x))$ soit libre.

4. Montrer que le sous-espace
$$E_x = \mathrm{Vect}(x, v(x), \ldots, v^p(x))$$
est stable par v.
5. Montrer que la matrice dans la base $\mathcal{B}_x$ de la restriction de l'endomorphisme v au sous-espace E_x est une matrice compagnon.
6. Écrire le polynôme associé à cette matrice compagnon.
7. En déduire que le polynôme caractéristique de v vérifie $p_v(v)(x) = 0$.
8. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.