

Feuille d'exercices n° 2

DÉTERMINANTS ET PERMUTATIONS

Exercice 1. Soient π_1 , π_2 et π_3 trois permutations de S_8 données dans la notation en deux lignes par les expressions suivantes :

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 8 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 1 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 2 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\pi_1 \circ \pi_2$, $\pi_2 \circ \pi_1$ et $\pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$.
2. Déterminer le support de ces permutations.
3. Calculer leurs inverses.
4. Trouver leurs décompositions en produit de cycles à supports disjoints.
5. Représenter les permutations comme produit de transpositions.
6. Calculer leurs signatures.

Exercice 2. 1. Écrire une liste des permutations de S_4 et leurs signatures.

2. Donner un exemple d'une permutation σ dans S_{12} sans point fixe et avec pour signature $\varepsilon(\sigma) = -1$.
3. Soit π une permutation telle que $\pi^3 = \text{id}$. Quelle est sa signature ?

Exercice 3. * Montrer que deux cycles à support disjoint dans S_n commutent.

Exercice 4. * Un élément a de S_n est dit d'ordre k si k est le plus petit entier positif tel que $a^k = \text{id}$.

1. Quel est l'ordre d'un cycle de longueur l ?
2. Pourquoi toute permutation de S_n est d'ordre fini ?
3. * Soit $\sigma \in S_n$ et k son ordre. Montrer que si pour un entier positif m on a $\sigma^m = \text{id}$ alors k divise m (utiliser la division euclidienne de m par k).
4. * Soient $\sigma, \tau \in S_n$ de supports disjoints. Montrer que l'ordre de $\sigma \circ \tau$ est le PPCM des ordres de σ et de τ .
5. En déduire que si $\sigma \in S_n \setminus \{\text{id}\}$ de décomposition canonique $\sigma = c_1 \cdots c_k$. L'ordre de σ est alors le PPCM des ordres des cycles c_i .
6. Calculer l'ordre des permutations π_1, π_2, π_3 de l'exercice 1.

Exercice 5. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & -1 \\ -14 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 2 & -2 \\ 28 & -2 & -2 & 35 \end{pmatrix}$.

Calculer AB puis $\det B$.

Exercice 7. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, et $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

Calculer tMM . En déduire la valeur du déterminant de M .

Exercice 8. Soient k et a deux réels. Calculer les déterminants des matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 1 & k^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & k+1 & k+2 \\ 1 & k+2 & 2k+4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \cos a & 1 & -\sin a \\ 0 & 2 & 0 \\ \sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. On désigne par I_n la matrice identité de taille n . Déterminer les nombres complexes λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, dans les deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Montrer que les matrices suivantes ont un déterminant nul :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. À l'aide du pivot de Gauss, calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & c & c & c \\ a & d & d & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & \cdots & n & n \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A_n = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ a & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $D_n = \det A_n$.

1. Calculer D_2 et D_3 .
2. Calculer D_n en fonction de n (on pourra procéder de façon directe ou par récurrence).
3. Calculer le rang de la matrice A_n en fonction de a .

Exercice 15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, i.e ${}^tA = -A$.

Montrer que si A est inversible, alors n est nécessairement pair.

Exercice 16. On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0$, $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

Montrer que $\det(A) = \det(B) = 0$.

Exercice 17. On note $GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid M \text{ inversible et } M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})\}$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det M = \pm 1$.