

**Feuille d'exercices n° 1**

RÉVISIONS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

## 1 Espaces vectoriels – Bases

**Exercice 1.** Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille libre de vecteurs de  $E$ .

1. On pose  $f_1 = e_1 + e_2$ ,  $f_2 = e_2 + e_3$  et  $f_3 = e_3 + e_1$ . Montrer que la famille  $(f_1, f_2, f_3)$  est libre.
2. On pose  $g_1 = e_1 + e_2$ ,  $g_2 = e_2 + e_3$ ,  $g_3 = e_3 + e_4$  et  $g_4 = e_4 + e_1$ . Montrer que la famille  $(g_1, g_2, g_3, g_4)$  n'est pas libre.
3. On pose  $h_1 = e_1 + e_2$ ,  $h_2 = e_2 + e_3$ ,  $\dots$ ,  $h_{n-1} = e_{n-1} + e_n$  et  $h_n = e_n + e_1$ . La famille de vecteurs  $(h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, h_n)$  est-elle libre ?

**Exercice 2.** On considère les vecteurs suivants de  $\mathbb{R}^5$  :  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  est libre.
2. Soit  $v \in \mathbb{R}^5$ . À quelle condition  $v \in \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$  ?
3. Trouver un supplémentaire de  $E = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$  dans  $\mathbb{R}^5$ .

**Exercice 3.**

1. Soient  $F$  et  $G$  deux sous espaces vectoriels d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$ . Montrer que si  $\dim F + \dim G > n$ , alors  $F \cap G$  contient un vecteur non nul.
2. Dans  $\mathbb{R}^4$ , on considère les vecteurs  $u = (1, 0, 1, 0)$ ,  $v = (0, 1, -1, 0)$ ,  $w = (1, 1, 1, 1)$ ,  $x = (0, 0, 1, 0)$  et  $y = (1, 1, 0, -1)$ . Soit  $F = \text{Vect}(u, v, w)$  et  $G = \text{Vect}(x, y)$ . Quelles sont les dimensions de  $F, G, F + G$  et  $F \cap G$  ?

## 2 Applications linéaires – Théorème du rang

**Exercice 4.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On considère l'application  $u$  :

$$u : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z, t) \longmapsto (x + y + \alpha z + t, x + z + t, y + z)$$

1. Montrer que  $u$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer le noyau et l'image de  $u$ .

**Exercice 5.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$  si et seulement si la dimension de  $E$  est paire.

### 3 Matrices – Changements de base

**Exercice 6.** Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -10 & 8 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 8 & -16 & 2 \end{pmatrix}$ .

Soit  $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid u(x) = 2x\}$  et  $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid u(x) = -2x\}$ .

1. Montrer que  $E$  et  $F$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ , en donner une base et leurs dimensions.
2. Montrer que  $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$ .
3. Soit  $e_1$  un vecteur directeur de  $E$  et  $(e_2, e_3)$  une base de  $F$ . Calculer la matrice de  $u$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ .

**Exercice 7.**

1. Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  deux matrices carrées. Montrer que  $AB$  et  $BA$  ont la même trace.
2. Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que toutes les matrices de  $u$  ont la même trace.
3. Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  deux matrices semblables. Montrer que pour tout entier naturel  $k$ , les matrices  $A^k$  et  $B^k$  ont la même trace.

**Exercice 8.** Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$  est  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

On pose  $\varepsilon_1 = (1; 1; 1)$ ,  $\varepsilon_2 = (1; -1; 0)$ ,  $\varepsilon_3 = (1; 0; 1)$  et  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B}$  constitue une base de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Écrire la matrice  $M$  de  $u$  dans cette base. Quelle relation lie  $A$  et  $M$  ?
3. Déterminer une base de  $\text{Ker } u$  et de  $\text{Im}(u)$ .

### 4 Inversibilité

**Exercice 9.** Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ , et

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 10.** Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2 - 3A + 2I_2$ .
2. En déduire que la matrice  $A$  est inversible et expliciter son inverse.