UNIVERSITE LYON 1 - LICENCE STS - AUTOMNE 2016

Unité d'enseignement : Math III Algèbre
Partiel 17 nov 2016
Durée : 1h30

Exercice 1. *Questions de cours*
Montrer que le polynôme caractéristique de deux matrices semblables est identique.

Exercice 2. Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que les valeurs propres de A sont 1 et 2.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? (justifiez votre réponse)
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à A est

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x - y + z \end{cases}$$

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$, notons A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}.$$

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par la donnée de u_0 et u_1 et la relation de récurrence suivante, pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Lorsque A est diagonalisable, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. On suppose A diagonalisable. On note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et de A, puis U_n en fonction de U_0 et de A.