Université Claude Bernard Lyon 1

PCSI L2 UE MATH3

CC2 du 19 novembre 2014 - 2 heures

Les calculatrices ne sont pas permises. Les téléphones portables doivent être éteints. Aucun document n'est autorisé. Toute réponse doit être justifiée.

Question de cours. (2 pts) Soit (u_n) une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$.

1. Donner la définition de ce qui est un voisinage de ℓ. (1 pt)
2. Donner le définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. (1 pt)

Exercice 1. (8 pts) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités algébriques. (1 pt)
2. Montrer que si $a \neq 0$, alors A n'est pas diagonalisable. (1 pt)
3. On suppose que $a = 0$.
   (a) Déterminer une base (ainsi que la dimension) des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A. (2 pts)
   (b) Justifier pourquoi A est diagonalisable. (1 pt)
   (c) Donner une matrice diagonale D est une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$. (2 pts)
   (d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. (1 pt)

Exercice 2. (6 pts) On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique dont l'expression analytique dans la base $\mathcal{B}$ est

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 2\sqrt{3}x_2x_3.$$

1. Calculer la matrice $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$ de q dans la base $\mathcal{B}$. (1 pt)
2. Calculer les valeurs propres de A. (2 pts)
3. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}'$ dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale. (2 pts)
4. Donner l'expression analytique de q dans la base $\mathcal{B}'$. Est-ce que q est définie positive ? (1 pt)

Exercice 3. (8 pts) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 muni de la base canonique $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ où $P_0(X) = 1, P_1(X) = X$ et $P_2(X) = X^2$. On muni E du produit scalaire

$$(P, Q) \in E^2 \mapsto \langle P|Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt.$$

1. Calculer $||P_0||$, $\langle P_0|P_1\rangle$, $P_1 - \langle P_0|P_1\rangle P_0$ et $||P_1 - \langle P_0|P_1\rangle P_0||$. (2 pts)

2. Soit $F = \mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace vectoriel de E des polynômes de degré au plus 1. Soit $Q_1(X) = \sqrt{3}(2X - 1)$. A partir de la base $\mathcal{B}_1 = (P_0, P_1)$, grâce au procédé de Gram-Schmidt, montrer que la famille $\mathcal{C} = (P_0, Q_1)$ est une base orthonormée de F. (1 pt)

3. Soit $f : E \to F$ le projecteur orthogonal. Soit $R(X) = X^2$. Calculer $f(R)$.
   [Rappel : Si $F \leq E$ est un sous-espace d'un espace euclidien E, admettant une base orthonormée $(u_1, \cdots, u_p)$, alors la projection orthogonale f sur F est donnée par la formule $f(x) = \langle x|u_1\rangle u_1 + \cdots + \langle x|u_p\rangle u_p$.] (2 pts)

4. Calculer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$. (1 pts)

5. L'endomorphisme f est-il symétrique ? Peut-on le diagonaliser dans une base orthonormée ? (1 pt)

Exercice 4. Bonus (4 pts) Soit $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique et soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation

$$x^2 + xy + y^2 - 1 = 0.$$

1. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ dans laquelle l'équation de $\mathcal{C}$ est (3 pts)

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 - 1 = 0.$$

2. Quelle est la nature de $\mathcal{C}$? (1 pt)