

## Fiche 1 - Espaces vectoriels, applications linéaires

**Exercice 1.** Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}, \quad E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\},$$

$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \quad E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}.$$

**Exercice 2.**

1. Les vecteurs  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$  sont-ils linéairement indépendants dans  $\mathbb{R}^3$  ? Sont-ils générateurs de  $\mathbb{R}^3$  ?
2. Même question pour  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ .
3. Même question pour  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 3.** Soit  $E$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des fonctions infiniment dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\omega$  un nombre réel non nul.

1. On pose  $\vec{u} = \cos(\omega x)$  et  $\vec{v} = \sin(\omega x)$  comme fonctions de la variable réelle  $x$ . Montrer que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont des vecteurs de  $E$  linéairement indépendants.
2. Soit  $F_\omega$  le sous-espace vectoriel de  $E$  formé par les solutions de l'équation différentielle  $y'' + \omega^2 y = 0$ . On admet que  $\dim(F_\omega) = 2$ . Expliquer pourquoi  $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$  est une base de  $F_\omega$ .
3. On pose  $\vec{w} = \cos(\omega x + a)$  et  $\vec{r} = \sin(\omega x + a)$ , où  $a$  est un réel fixé. Ecrire  $\vec{w}$  et  $\vec{r}$  dans la base  $\mathcal{B}$  et montrer que  $\mathcal{C} = (\vec{w}, \vec{r})$  est une base de  $F_\omega$ .
4. Exprimer la fonction  $\cos(\omega x)$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 4.** Dans  $\mathbb{R}^2$ , on considère les sous-ensembles

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\} \quad \text{et} \quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}.$$

Montrer que  $E$  et  $F$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$  et que  $E \oplus F = \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 5.** Soit  $u$  l'application de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie, pour tout  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ , par

$$u(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t).$$

1. Montrer que  $u$  est linéaire.
2. Déterminer une base et la dimension du noyau de  $u$ .
3. En déduire le rang de  $u$ .

**Exercice 6.** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$f(\vec{e}_1) = 13\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_2) = -8\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_3) = -12\vec{e}_1 - 12\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3,$$

où  $B := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Démontrer que  $F_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = u\}$  et  $F_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = -u\}$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer la dimension de chacun d'eux.

2. Montrer que  $F_1$  et  $F_2$  sont supplémentaires.

## Exercices supplémentaires

**Exercice 7.** Pour tous les cas suivants, indiquer si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  :

- a)  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$
- b)  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$
- c)  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$
- d)  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$
- e)  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$
- f)  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \text{ et } z = x\}$

Dans les cas où  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , indiquer sa nature géométrique.

**Exercice 8.** Soit  $E$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des applications dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $F$  le sous-ensemble de  $E$  des applications  $f$  qui vérifient  $f(0) = f'(0) = 0$ .

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Soit  $H$  l'ensemble des applications  $x \mapsto ax + b$ , où  $a, b \in \mathbb{R}$ . Vérifier que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et montrer que  $F \oplus H = E$ .

**Exercice 9.**

1. Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  non colinéaires l'un à l'autre (c'est-à-dire tels que pour tout réel  $\lambda$ , on ait  $u \neq \lambda v$  et  $v \neq \lambda u$ ). Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par  $u$  et  $v$  est égal à  $\mathbb{R}^2$ .
2. En déduire la description complète des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 10.** Dans  $\mathbb{R}^4$ , on considère les vecteurs :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les familles  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  et  $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$  sont libres.
2. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $\mathcal{V} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ . Déterminer une base de  $F$ .
3. Soit  $G$  le sous-espace vectoriel engendré par  $\mathcal{W} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4)$ . Déterminer une base de  $G$ .

**Exercice 11.** Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires (avec  $a \in \mathbb{R}$ ) :

- a)  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) \mapsto (y, x)$
- b)  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) \mapsto (x, a)$
- c)  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) \mapsto (ax, ay)$
- d)  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) \mapsto (x + a, y + a)$
- e)  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y, z) \mapsto (x + z, y + z)$
- f)  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(x, y) \mapsto (2x, 0, x - y)$
- g)  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \sin x$

**Exercice 12.** On considère  $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, \quad f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1, \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_3.$$

1. Déterminer l'image par  $f$  d'un élément  $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$  de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer le noyau et l'image de  $f$  et donner une base de chacun d'eux.
3. Montrer que  $f \circ f = f$ .