CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON

Exercice 1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue. On considère la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^1 x^n f(x)\, dx$.

1. Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k$$

qui est la somme des $(n+1)$-premiers termes de la suite géométrique de raison $-x$, avec $-x \neq 1$, et par conséquent

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} = \frac{1+(-1)^n x^{n+1}}{1+x}.$$

2. On note $(S_n)_{n\geq 0}$ la suite des sommes partielles, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^k f(x)\, dx = \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k f(x) \Big)\, dx$$

$$= \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \Big) f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1+(-1)^n x^{n+1}}{1+x} f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\, dx + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} f(x)\, dx.$$

3. Montrons que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente et que sa somme vaut $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\, dx$.

Cela revient à montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\, dx$.

D'après la question (2), on a

$$\Big| S_n - \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\, dx \Big| = \Big| \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} f(x)\, dx \Big|.$$

Comme $0 \leq x \leq 1$, on a $1 \leq 1+x$ et donc l'encadrement

$$0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1.$$

Comme f est continue sur $[0,1]$, elle est bornée et donc il existe $M>0$ tel que $|f(x)| \leq M$. D'où

$$\Big| \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} f(x)\,dx \Big| \leq \int_0^1 \Big| f(x) \Big| x^{n+1}\,dx \leq M \int_0^1 x^{n+1}\,dx = M \frac{1}{n+2}.$$

D'où

$$\Big| S_n - \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\,dx \Big| \leq M \frac{1}{n+2},$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+2} = 0$, on déduit

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\,dx.$$

4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$. On a

$$u_n = (-1)^n \int_0^1 x^n\,dx = \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} = \ln(2)$$

et d'après ce qui précède, on déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$$

Exercice 2. Soit $I =]1,+\infty[$. Pour tout $x \in I$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$.

1. Montrons que f est définie sur I. Cela revient à montrer que pour tout $x \in I$ fixé, la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente ou d'une façon équivalente que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I.
   Comme $x > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1/x^n)+1} = 1.$$

   Par conséquent,

$$\frac{1}{1+x^n} \sim \frac{1}{x^n}.$$

   Les deux séries $\sum \dfrac{1}{1+x^n}$, $\sum \dfrac{1}{x^n}$ sont à termes positifs et la série $\sum \dfrac{1}{x^n}$ est une série géométrique, de raison $\dfrac{1}{x} < 1$, convergente. Par le critère de comparaison, la série $\sum \dfrac{1}{1+x^n}$ converge.

2. Montrons que f est continue sur I. Soient $x_0 \in I$ et $a, b \in I$ avec $x_0 \in [a, b]$. Pour montrer que f est continue en x_0, il suffit de montrer que la série $\sum \dfrac{1}{1+x^n}$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a, b]$.
On a
$$a \leq x \leq b \Rightarrow 1 + a^n \leq 1 + x^n \leq 1 + b^n \Rightarrow \frac{1}{1+b^n} \leq \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1+a^n}.$$
Donc
$$\|u_n\| \leq \frac{1}{1+a^n}$$
et comme la série $\sum \dfrac{1}{1+a^n}$ est convergente, la série $\sum \|u_n\|$ est convergente. Donc $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, b]$.
3. Montrons que f est de classe C^1 sur I. De même ici, on étudie la série sur un intervalle fermé et borné $[a, b] \subseteq I$.
On a
$$|u_n'(x)| = \left|\frac{-nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}\right| = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}.$$
Montrons que la série $\sum u_n'$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a, b]$.
La première méthode consiste à majorer $\|u_n'\| = \sup_{x\in[a,b]} |u_n'(x)|$ par un terme d'une série numérique convergente.
On a
$$|u_n'(x)| = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} = \frac{x^{2n}}{(1+x^n)^2} \frac{n}{x^{n+1}} \leq \frac{n}{a^{n+1}}$$
car $\dfrac{x^{2n}}{(1+x^n)^2} \leq 1$ et $a \leq x$.
Montrons que la série $\sum \frac{n}{a^{n+1}}$ est convergente. On utilise la règle de D'Alembert.
On a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{a^{n+2}} \times \frac{a^{n+1}}{n} = \frac{1}{a} < 1$$
et donc la série $\sum \frac{n}{a^{n+1}}$ est convergente. Par comparaison, la série $\sum \frac{na^{n-1}}{(1+a^n)^2}$ est convergente.
On conclut que la série $\sum u_n'$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a, b]$. Comme la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[a, b]$ et comme chaque u_n est de classe C^1, on déduit que f est de celasse C^1.
La seconde méthode consiste dans le calcul direct de $\|u_n'\| = \sup_{x\in[a,b]} |u_n'(x)|$.
Étudions les variations de $v_n = |u_n'|$. On a
$$v_n'(x) = \frac{n(n-1)x^{n-2}(1+x^n)^2 - 2(1+x^n)nx^{n-1}nx^{n-1}}{(1+x^n)^4}$$
$$= \frac{nx^{n-2}(1+x^n)\Big((n-1)(1+x^n) - 2nx^n\Big)}{(1+x^n)^4} = \frac{nx^{n-2}(1+x^n)\Big((n-1) - (n+1)x^n\Big)}{(1+x^n)^3}.$$

D'où $v_n'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \leq \sqrt[n]{\dfrac{n-1}{n+1}}$. Comme $\sqrt[n]{\dfrac{n-1}{n+1}} < 1$, v_n est décroissante sur I. Par conséquent,

$$\|u_n'\| = \sup_{x\in[a,b]} |u_n'(x)| = |u_n'(a)| = \frac{na^{n-1}}{(1+a^n)^2}.$$

On a

$$\frac{na^{n-1}}{(1+a^n)^2} \sim \frac{na^{n-1}}{a^{2n}} = \frac{n}{a^{n+1}}.$$

On raisonne ensuite comme dans le cas précédent, en déduisant que la série $\sum \frac{n}{a^{n+1}}$ est convergente et donc $\sum u_n$ converge normalement.

4. Montrons que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. Pour tout $Y > 1$, on a $2Y^2 - Y - 1 > 0$. Pour tout $x > 1$, $x^n > 1$ et donc

$$1 + x^n \leq 2x^{2n}.$$

D'où

$$\frac{1}{2x^{2n}} \leq \frac{1}{1+x^n}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2x^{2n}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} = f(x).$$

La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^{2n}}$ est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{x^2}$ et sa somme vaut $\dfrac{x^2}{x^2-1}$.
D'où

$$\frac{x^2}{2(x^2-1)} \leq f(x).$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{2(x^2-1)} = +\infty$, on déduit que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

Exercice 3.

1. On utilise la règle de D'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)^3+1)3^n}{3^{n+1}(n^3+1)} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi le rayon de convergence est 3.

2. On utilise la règle de D'Alembert. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)n^3}{\ln(n)(n+1)^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n)+\ln(1+1/n))n^3}{\ln(n)(n+1)^3} = 1.$$

Ainsi le rayon de convergence est 1.

3. On a $\dfrac{\ln(n^n)}{\ln(n)^n} = \dfrac{n\ln(n)}{\ln(n)^n} = \dfrac{n}{\ln(n)^{n-1}}$. Comme les deux séries $\sum \dfrac{n}{\ln(n)^{n-1}}x^n$, $\sum \dfrac{n+1}{\ln(n+1)^n}x^n$, ont le même rayon de convergence, il suffit de calculer le rayon de convergence de la dernière série.
   On applique la règle de Cauchy :
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n+1}}{\ln(n+1)} = 0.$$
   Donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.
4. On a $\sin^3(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n^3}$. Par conséquent, les séries $\sum \sin^3(\frac{1}{n})x^n$ et $\sum \frac{1}{n^3}x^n$ ont le même rayon de convergence. Par la règle de D'Alembert, le rayon de convergence de la dernière série est 1. On conclut que le rayon de convergence de la série $\sum \sin^3(\frac{1}{n})x^n$ est 1.

Exercice 4. Calculons le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$. Pour cela, calculons le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{x^n}{2n+1}$. Par la règle de D'Alembert, le rayon de convergence de cette série est 1.

On a
$$|x| < 1 \Leftrightarrow |x^2| < 1 \Leftrightarrow \text{ la série } \sum \frac{x^{2n}}{2n+1} \text{ est absolument convergente}$$
et
$$|x| > 1 \Leftrightarrow |x^2| > 1 \Leftrightarrow \text{ la série } \sum \frac{x^{2n}}{2n+1} \text{ est divergente.}$$

Donc le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$ est 1.

Calculons sa somme. Posons, pour $x \in]-1,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$. La série $\sum x^{2n}$ est une série géométrique de raison x^2 et sa somme sur $]-1,1[$ est
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}.$$
Par intégration, pour tout $t \in]-1,1[$, on a
$$\int_0^t \frac{1}{1-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^t x^{2n}\,dx\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = tf(t).$$
Or
$$\int_0^t \frac{1}{1-x^2}\,dx = \mathrm{Argth}(t) - \mathrm{Argth}(0) = \mathrm{Argth}(t)$$
et donc
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0; \\ \dfrac{\mathrm{Argth}(x)}{x} & \text{si} \quad x \in]-1,0[\cup]0,1[. \end{cases}$$

Exercice 5. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1-x^2)y''(x) - 6xy'(x) - 4y(x) = 0.$$

1. Soit f développable en série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, au voisinage de 0, de rayon de convergence $R > 0$ et supposons que f est solution de (E).
   Pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$xf'(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n, \quad (1-x^2)f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n.$$

   Par réindexation, on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

   et donc

$$(1-x^2)f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n$$

$$= 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{+\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n]x^n.$$

   En remplaçant dans (E)

$$(1-x^2)f''(x) - 6xf'(x) - 4f(x)$$

$$= 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{+\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n]x^n - 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$= (2a_2 + 6a_3 x - 6a_1 x - 4a_0 - 4a_1 x) + \sum_{n=2}^{+\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 6na_n - 4a_n]x^n = 0.$$

   On a

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 6na_n - 4a_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2+5n+4)a_n$$

   et comme $n^2 + 5n + 4 = (n+1)(n+4)$, on a

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 6na_n - 4a_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1(n+4)a_n$$

$$= (n+1)((n+2)a_{n+2} - (n+4)a_n)$$

   Par unicité du développement, on obtient

$$a_2 - 2a_0 = 0, 3a_3 - 5a_1 = 0, \quad (n+2)a_{n+2} - (n+4)a_n = 0 \text{ pour tout } n \geq 2.$$

Donc pour tout $n \geq 2$, on a la formule de récurrence

$$a_{n+2} = \frac{n+4}{n+2} a_n,$$

qu'on peut réécrire par réindexation

$$a_n = \frac{n+2}{n} a_{n-2}, \text{ pour tout } n \geq 4.$$

On a

$$a_n = \frac{n+2}{n} a_{n-2} = \frac{n+2}{n} \times \frac{n}{n-2} a_{n-4} = \frac{n+2}{n-2} a_{n-4} = \frac{n+2}{n-2} \frac{n-2}{n-4} a_{n-6} = \cdots$$

et par récurrence

$$a_n = \frac{n+2}{n-(n-2)+2} a_{n-(n-2)} = \frac{n+2}{4} a_2 = \frac{n+2}{2} a_0, \quad \text{si } n \text{ est pair}$$

$$a_n = \frac{n+2}{n-(n-3)+2} a_{n-(n-3)} = \frac{n+2}{5} a_3 = \frac{(n+2)}{3} a_1, \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

D'où

$$f(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+1) x^{2k} + \frac{a_1}{3} \sum_{k=0}^{+\infty} (2(k+1)+1) x^{2k+1}.$$

Calculons le rayon de convergence. Par la règle de D'Alembert, le rayon de convergence des séries $\sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+1)x^{2k}$, $\sum_{k=0}^{+\infty}(2(k+1)+1)x^{2k+1}$ est 1. Par conséquent sur l'intervalle $]-1,1[$, f est une solution de (E) (ce qui inclus le cas où f est la fonction nulle, donc quand $a_0 = a_1 = 0$).

2. On a, sur $I =]-1,1[$,

$$\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k+2}\Big)' = \sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+1) x^{2k+1} = x \sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+1) x^{2k}$$

et

$$\frac{x^2}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2k+2}, \quad \Big(\frac{x^2}{1-x^2}\Big)' = \frac{2x}{(1-x^2)^2},$$

ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+1) x^{2k} = \frac{2}{(1-x^2)^2}.$$

De même

$$\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2(k+1)+1}\Big)' = \sum_{k=0}^{+\infty} (2(k+1)+1) x^{2(k+1)} = x \sum_{k=0}^{+\infty} (2(k+1)+1) x^{2k+1}$$

$$\frac{x^3}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2(k+1)+1}, \quad \Big(\frac{x^3}{1-x^2}\Big)' = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2},$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(2(k+1)+1)x^{2k+1} = \frac{x(3-x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

On conclut

$$f(x) = \frac{a_0 + (a_1/3)x(3-x^2)}{(1-x^2)^2}.$$