CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU FINAL

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer les valeurs propres de A.*

   On a

   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 0 \\ 1 & 3-X & 0 \\ 0 & 0 & -X \end{vmatrix} = -X(3-X)^2 + X = X(1-(3-X)^2).$$

   D'où $P_A(X) = 0$ si et seulement si $X = 0$ ou $(3-X)^2 = 1$ si etsuelement si $X = 0$ ou $X = 2$ ou $X = 4$. Donc les valeurs propres sont $0, 2, 4$, chacune d'elles est de multiplicité 1.

2. *Déterminer une base orthonormée dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale.*

   Comme A est symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Calculons des bases des sous-espaces propres.

   $$\vec{u} = (x, y, z) \in E_0(A) \Leftrightarrow 3x + y = 0 \text{ et } x + 3y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$

   D'où $\vec{u} = (0, 0, \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $E_0(A)$ est engendré par $\vec{u}_1 = (0, 0, 1)$.

   $$\vec{u} = (x, y, z) \in E_2(A) \Leftrightarrow 3x + y = 2x, x + 3y = 2y \text{ et } 0 = 3z \Leftrightarrow y = -x \text{ et } z = 0.$$

   D'où $\vec{u} = (\lambda, -\lambda, 0)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $E_2(A)$ est engendré par $\vec{u}_2 = (1, -1, 0)$.

   $$\vec{u} = (x, y, z) \in E_4(A) \Leftrightarrow 3x + y = 4x, x + 3y = 4y \text{ et } 0 = 4z \Leftrightarrow y = x \text{ et } z = 0.$$

   D'où $\vec{u} = (\lambda, \lambda, 0)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $E_4(A)$ est engendré par $\vec{u}_2 = (1, 1, 0)$.
   On a

   $$\|\vec{u}_1\| = 1,\ \|\vec{u}_2\| = \|\vec{u}_3\| = \sqrt{2}.$$

   La famille $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \frac{\vec{u}_2}{\sqrt{2}}, \frac{\vec{u}_3}{\sqrt{2}})$ constitue une base orthonormée dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale.

Exercice 2.

1. *Étudier la convergence de la série numérique de terme général donné pour tout $n \geq 1$ par*
$$u_n = \frac{\sqrt{n} + \sin(n)}{\ln(n+1) + n^3}.$$

   On a
$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^3} \times \frac{1 + \sin(n)/\sqrt{n}}{1 + \ln(n+1)/n^3}, \ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} = 0, \ \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+n)}{n^3} = 0.$$
   D'où
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \times \frac{n^3}{\sqrt{n}} = 1$$
   et donc $u_n \sim \frac{\sqrt{n}}{n^3} = \frac{1}{n^{5/2}}$. Comme les deux séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^{5/2}}$ sont à termes positifs et comme la série $\sum \frac{1}{n^{5/2}}$ est une série de Riemann convergente (car $5/2 > 1$), en déduit, par le critère de comparaison, que la série $\sum u_n$ est convergente.

2. *Montrer que la série numérique suivante est convergente et calculer sa somme :*
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+2)}.$$

   De même ici, on a $\frac{1}{n(n+2)} \sim \frac{1}{n^2}$ et par le critère de comparaison $\sum \frac{1}{n(n+2)}$ est convergente.
   On a
$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}$$
   et donc
$$S_n = \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k+2}) = \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{k=n+2} \frac{1}{k}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}).$$
   D'où
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$
   qui est la somme de la série.

Exercice 3.

I. On considère $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à 2. On pose $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X(X-1)$ et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$.

1. *Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.*

   Comme la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$ est 3, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$. Alors
$$\lambda_1 + \lambda_2 X + \lambda_3 X(X-1) = 0$$
   et donc $\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)X + \lambda_3 X^2 = 0$. D'où, par l'unicité de l'écriture d'un polynôme, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_2 - \lambda_3 = 0$. Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est libre.

2. *Soit $Q(X) = X^2 + X + 1$. Calculer les composantes de Q dans la base $\mathcal{B}$.*

   Cherchons donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$Q = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$$

   ce qui revient à

$$1 + X + X^2 = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)X + \lambda_3 X^2.$$

   On déduit, par identification, $\lambda_1 = 1, \lambda_3 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

II. On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ où

$$a_n = \frac{n^2+n+1}{n!}.$$

1. *Calculer son rayon de convergence.*

   On utilise la règle de D'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2+n+1}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{n^2+n+1} \times \frac{1}{n+1} = 0.$$

   Donc le rayon de convergence est $+\infty$.

2. *Calculer sa somme (Utiliser la question I.2).*

   D'après la question I.2, on a

$$n^2 + n + 1 = 1 + 2n + n(n-1)$$

   et donc, pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{n^2+n+1}{n!} = \frac{1}{n!} + 2\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!}$$

   D'où

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = 1 + 3x + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n!}x^n + 2\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-1)!}x^n + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-2)!}x^n$$
$$= e^x + 2x + 2x\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + x^2\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-2)!}x^{n-2}$$
$$= e^x + 2x(1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}x^n) + x^2 \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n$$
$$= (1 + 2x + x^2)e^x.$$

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - xy' - y = 0$$

avec la condition initiale

$$(CE) \qquad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.$$

On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$ et vérifiant la condition initiale (CE).

1. *Calculer a_0 et a_1.*

   D'après la forme de Taylor-Maclaurin,

$$a_0 = \frac{y(0)}{0!} = y(0) = 1, \;\; a_1 = \frac{y'(0)}{1!} = y'(0) = 0.$$

2. *Montrer que a_n vérifie la relation de récurrence*

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-2}, \;\; \textit{pour tout } n \geq 2.$$

   On a

$$y'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}, \;\; xy'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^n,$$

   et

$$y''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

   En remplaçant dans (E),

$$\begin{aligned} y''(x) - xy'(x) - y(x) &= \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n\geq 1} n a_n x^n - \sum_{n \geq 0} a_n x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n\geq 1} (n+1) a_n x^n - a_0 \\ &= (2a_2 - a_0) + \sum_{n\geq 1} (n+1)((n+2)a_{n+2} - a_n) x^n. \end{aligned}$$

   D'où

$$a_2 = \frac{1}{2} a_0, \;\; a_{n+2} = \frac{1}{n+2} a_n \text{ pour tout } n \geq 1,$$

   ce qu'on peut réécrire

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-2}, \;\; \text{pour tout } n \geq 2.$$

3. *Déterminer l'expression de a_{2k} et montrer que $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

   Par récurrence sur n,

$$a_{2k} = \frac{1}{2k} a_{2(k-1)} = \frac{1}{(2k)(2(k-1))} a_{2(k-2)}$$

   et donc

$$a_{2k} = \frac{1}{(2k)(2(k-1)) \cdots 2} a_0 = \frac{1}{2^k k!}.$$

   De même

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{1}{2k+1} a_{2k-1} = \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} a_{2k-3} \\ &= \frac{1}{(2k+1)(2k-1)(2k-3)\cdots 1} a_1 = 0, \end{aligned}$$

   car $a_1 = 0$.

4. *Donner l'expression de la série entière obtenue et calculer son rayon de convergence.*

   La série obtenue est

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n n!} x^{2n}.$$

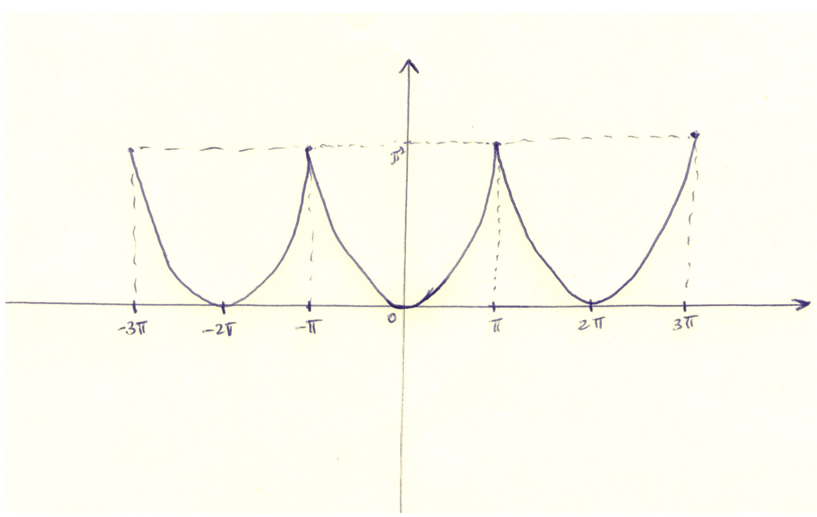
   Calculons le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n n!} x^n$. Par la règle de D'Alembert

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n n!}{2^{n+1}(n+1)!} = 0$$

   et donc le rayon de convergence est $+\infty$. Il est en de même pour la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n n!} x^{2n}$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

1. *Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.*



2. *Calculer les coefficients de Fourier de f.*

   La fonction f est paire. Par conséquent, $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. On calcule a_n.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2}{\pi}[\frac{x^3}{3}]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

   Pour tout $n \geq 1$, en appliquant une intégration par parties, on a

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx) = \frac{2}{\pi}\Big(\Big[x^2\frac{\sin(nx)}{n}\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\frac{\sin(nx)}{n}\, dx\Big) = \frac{-4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\, dx.$$

   Une nouvelle intégration par parties donne

$$a_n = \frac{-4}{\pi n}\Big(\Big[\frac{-x\cos(nx)}{n}\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\, dx\Big) = \frac{4\cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

3. *Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, a-t-on $Sf(x) = f(x)$?*

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. De même elle est dérivable par morceaux sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, par le théorème de Dirichlet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $Sf(x) = f(x)$. En particulier pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

4. *Calculer les sommes des séries numériques suivantes*

$$(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}, \quad (b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}.$$

   (a) En prenant $x = 0$, on obtient

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

   et par conséquent

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}.$$

   (b) Comme la fonction f est continue, on peut appliquer l'égalité de Parseval, qui

   donne

$$(\frac{2\pi^2}{3})^2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{4(-1)^n}{n^2})^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\, dx.$$

   D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{2\pi}\Big[\frac{x^5}{5}\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{\pi^4}{9}\Big) = \frac{1}{8}(\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9}) = \frac{\pi^4}{90}.$$