Corrigé du CC2 du 24 mars 2014

Q1 a. (a) $\mathrm{Im}(L) = \{\vec{w} \in W \,/\, \exists \vec{v} \in V,\ L(\vec{v}) = \vec{w}\}$.

(b) $\mathrm{Ker}(L) = \{\vec{v} \in V \,|\, L(\vec{v}) = \vec{0}\}$.

(c) $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(L)) + \dim(\mathrm{Ker}(L))$.

b. (a) $P_A(X) = (3-X)(2-X)(1-X)$ et donc les valeurs propres de A sont 1, 2 et 3.

(b) $(x,y,z) \in E_1(A) \Leftrightarrow y=0$ et $x=z$. Donc $(1,0,1)$ est un vecteur générateur de $E_1(A)$.

$(x,y,z) \in E_2(A) \Leftrightarrow x=0$ et $y=z$. Donc $(0,1,1)$ est un vecteur générateur de $E_2(A)$.

$(x,y,z) \in E_3(A) \Leftrightarrow y=z=0$. Donc $(1,0,0)$ est un vecteur générateur de $E_3(A)$.

La famille $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (0,1,1)$, $\vec{w} = (1,0,0)$ est une base formée de vecteurs propres de A.

(c)
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Q2 (a) $P_A(X) = X^2 + 13X + 36$, On a $\Delta = 25$ et $X_1 = -9$, $X_2 = -4$. Donc les valeurs propres de A sont -9 et -4.

$(x,y) \in E_{-9}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+4y = -9x \\ x - 2y = -9y \end{cases} \Leftrightarrow x+y=0$.

Donc $(\vec{u} = (1,-1))$ est une base de $E_{-9}(A)$.

$(x,y) \in E_{-4}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+4y = -4x \\ x - 8y = -4y \end{cases} \Leftrightarrow x = 4y$.

Donc $(\vec{v} = (4,1))$ est une base de $E_{-4}(A)$.

Une base de vecteurs propres est $(\vec{u}, \vec{v})$.

b. (a) On a
$$\begin{pmatrix} \frac{d^2x_1}{dt^2} \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Donc les modes normaux sont les vecteurs propres constitués de $E_{-9}(A)$ et $E_{-4}(A)$.

(b) Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C} = ((1,-1),(4,1))$. On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En posant $Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on a $Y'' = AY = PDP^{-1}Y$ où $D = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. En posant $Z = P^{-1}Y$, on obtient le système $Z'' = DZ$. Donc le système

$$\begin{cases} z_1'' = -9z_1 \\ z_2'' = -4z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1'' + 9z_1 = 0 \\ z_2'' + 4z_2 = 0, \end{cases}$$

où $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et dont les solutions sont :

$$\begin{cases} z_1(x) = A_1 \cos(3x) + B_1 \sin(3x), & A_1, B_1 \in \mathbb{R} \\ z_2(x) = A_2 \cos(2x) + B_2 \sin(2x), & A_2, B_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$Z = P^{-1}Y$ et donc $PZ = Y$ et d'où :

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + 4z_2 \\ x_2 = -z_1 + z_2. \end{cases}$$

On a $\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 + 4A_2 = 1 \\ -A_1 + A_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{-3}{5}, \\ A_2 = \frac{2}{5}. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1'(0) = 0 \\ x_2'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3B_1 + 8B_2 = 0 \\ -3B_1 + 2B_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow B_1 = B_2 = 0.$

Donc la solution recherchée est : $\begin{cases} x_1(t) = \frac{-3}{5}\cos(3t) + \frac{8}{5}\cos(2t), \\ x_2(t) = \frac{3}{5}\cos(3t) + \frac{2}{5}\cos(2t). \end{cases}$

La solution est périodique de période 2π.

Q3 (a) Posons $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$, $P_2(t) = t^2$. On a :

$$L(P_0)(t) = t \times 0 + t(1+t) \times 0 = 0$$
$$L(P_1)(t) = t \times P_1'(t) + t(1+t)P_1''(t) = t, \text{ donc } L(P_1) = P_1.$$
$$L(P_2)(t) = t \times P_2'(t) + t(1+t)P_2''(t)$$
$$= 2t^2 + t(1+t)2 = 4t^2 + 2t$$

donc $L(P_2) = 4P_2 + 2P_1$.

D'où $\quad A_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) Soit $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. On a

$$\begin{aligned} L(P)(t) &= t\,P'(t) + t(1+t)\,P''(t) \\ &= t\,(a_1 + 2a_2 t) + t(1+t)\,2a_2 \\ &= (a_1 + 2a_2)\,t + 4a_2 t^2 \end{aligned}$$

qui est la forme générale recherchée.

(c) Soit $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ avec $L(P) = 0$. Donc

$a_1 + 2a_2 = 0$ et $4a_2 = 0$ (Voir (b)).

D'où $a_2 = a_1 = 0$. Donc Ker(L) est le s.e.v des polynômes constants.