Université Claude Bernard Lyon 1
PCSI L2 UE MATH3

Corrigé succinct du CC1 du 15 octobre 2014

Les calculatrices ne sont pas permises. Les téléphones portables doivent être éteints. Aucun document n'est autorisé. Toute réponse doit être justifiée.

Questions de cours. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et L un endomorphisme de E.

a. Définir ce qu'est un vecteur propre de L.

Un vecteur $\vec{u} \in E$ est un vecteur propre de L si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $L(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.

b. Définir ce qu'est une valeur propre de L.

Un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de L s'il existe un vecteur $\vec{u} \in E$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$, tel que $L(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.

Exercice 1. Soit $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par

$$L(x, y, z) = (y + z, 3x + 3z, -x + y)$$

a. Écrire la matrice de L par rapport à la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$.

On a

$$L(\vec{e}_1) = L(1, 0, 0) = (0, 3, -1),\ L(\vec{e}_2) = (1, 0, 1),\ L(\vec{e}_3) = (1, 3, 0)$$

et donc la matrice A de L par rapport à la base canonique $\mathcal{E}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Déterminer une base du noyau de L. En déduire le rang de L.

Rappelons que

$$Ker(L) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid L(x, y, z) = (0, 0, 0)\}.$$

Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\vec{u} \in Ker(L) \text{ si et seulement si } L(x, y, z) = (0, 0, 0) \text{ si et seulement si } \begin{cases} y + z = 0 \\ 3x + 3z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

Résolvons le système précédent. On a

$$\left\{\begin{array}{c} y+z=0 \\ 3x+3z=0 \\ -x+y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y+z=0 \\ x+z=0 \\ -x+y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y+z=0 \\ x+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=-z \\ x=-z \end{array}\right.$$

Donc en prenant z comme un paramètre λ on obtient

$$x=-\lambda,\ y=-\lambda,\ z=\lambda \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

D'où $\vec{u}=(-\lambda,-\lambda,\lambda)=\lambda(-1,-1,1)$. Par conséquent

$$Ker(L)=\{\lambda(-1,-1,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}=Vect((-1,-1,1)).$$

Donc $\mathcal{C}=(\vec{u})$ où $\vec{u}=(-1,-1,1)$ est une base de $Ker(L)$.

Par le théorème du rang

$$\dim(\mathbb{R}^3)=rg(L)+\dim(Ker(L))$$

et par conséquent $rg(L)=3-1=2$.

c. Donner la matrice de passage $P=P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ de la base canonique à la base $\mathcal{B}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ où $\vec{u}_1=(1,2,1),\vec{u}_2=(0,3,1)$ et $u_3=(-1,2,1)$.

Les colonnes de la matrice de passage $P=P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ sont constituées des composantes des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{E}$ et donc

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d. Calculer $P^{-1}=P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$.

On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{array}\right)$$

D'où

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

e. Déterminer la matrice de L par rapport à la base $\mathcal{B}$.

D'après la formule du cours

$$M_{\mathcal{B}}(L) = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} M_{\mathcal{E}}(L) P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$$

et donc

$$B = P^{-1}AP.$$

On a

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 4 & -3 & -6 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc la matrice de L par rapport à la base $\mathcal{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 4 & -3 & -6 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et (S) le système d'équations linéaires suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} ax + 2y + az = 1, \\ ax + (a+4)y + 3az = -2, \\ -ax - 2y + z = 1, \\ (a+2)y + (3a+1)z = b. \end{cases}$$

a. Montrer que (S) est équivalent au système (S') suivant :

$$(S') \quad \begin{cases} ax + 2y + az = 1, \\ (a+2)y + 2az = -3, \\ (1+a)z = 2, \\ (1+a)z = b+3. \end{cases}$$

Posons

$$(S) \quad \begin{cases} ax + 2y + az = 1 & \cdots \quad L_1 \\ ax + (a+4)y + 3az = -2 & \cdots \quad L_2 \\ -ax - 2y + z = 1 & \cdots \quad L_3 \\ (a+2)y + (3a+1)z = b & \cdots \quad L_4 \end{cases}$$

En appliquant les oprations élémentaires

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \; L_3 \leftarrow L_3 + L_1,$$

on obtient le système

$$(S_1)\quad \begin{cases} ax + 2y + az = 1 & \cdots \quad L'_1 \\ (a+2)y + 2az = -3 & \cdots \quad L'_2 \\ (1+a)z = 2 & \cdots \quad L'_3 \\ (a+2)y + (3a+1)z = b & \cdots \quad L_4. \end{cases}$$

En appliquant l'opération élémentaire $L_4 \leftarrow L_4 - L'_2$, on obtient le système :

$$(S')\quad \begin{cases} ax + 2y + az = 1, \\ (a+2)y + 2az = -3, \\ (1+a)z = 2, \\ (1+a)z = b+3. \end{cases}$$

Comme (S') est obtenu à partir de (S) par une suite d'opérations élémentaires, (S) est équivalent à (S').

b. Résoudre selon les valeurs des paramètrs réels a, b, le système (S).

Comme (S) est équivalent à (S'), il suffit de résoudre ce dernier. La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & a & 1 \\ 0 & a+2 & 2a & -3 \\ 0 & 0 & 1+a & 2 \\ 0 & 0 & 1+a & b+3 \end{array}\right)$$

On considère les cas suivants :

Cas 1 : $a \neq -1$. Dans ce cas, les deux dernières équations donnent : $2 = b+3$ et donc $b = -1$. On conclut que si $b \neq -1$, le système n'admet pas de solutions. Supposons donc $b = -1$. Alors on obtient la valeur de z et le nouveau système

$$z = \frac{2}{1+a}, \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & a & 1 \\ 0 & a+2 & 2a & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/(1+a) \end{array}\right).$$

En réduisant, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 0 & 1 - a(2/(1+a)) \\ 0 & a+2 & 0 & -3 - 2a(2/(1+a)) \\ 0 & 0 & 1 & 2/(1+a) \end{array}\right).$$

Si $a + 2 = 0$ et donc $a = -2$, alors $-3 - 2a(2/(1+a)) = 0$ et donc $a = 7/3$; ce qu'est impossible. Donc si $b = -2$, le système n'admet pas de solutions.

Supposons donc $a \neq -2$. Alors

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 0 & 1 - a(2/(1+a)) \\ 0 & 1 & 0 & -3 - 7a/(1+a)(2+a) \\ 0 & 0 & 1 & 2/(1+a) \end{array}\right)$$

et donc, après réduction et calcul du second membre

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & (-a^2+6a+5)/(1+a)(2+a) \\ 0 & 1 & 0 & (-3-7a)/(1+a)(2+a) \\ 0 & 0 & 1 & 2/(1+a) \end{array}\right).$$

Si $a = 0$ *alors* $-a^2+6a+5 = 0$*; ce qu'est impossible. Donc si* $a = 0$*, le système n'a pas de solutions.*

Si $a \neq 0$*, alors le système admet donc une unique solution*

$$x = (-a^2+6a+5)/a(1+a)(2+a), \quad y = (-3-7a)/(1+a)(2+a), \quad z = 2/(1+a).$$

Cas 2 : $a = -1$*. On obtient alors*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b+3 \end{array}\right)$$

et comme la troisième équation est une équation impossible, le système n'a pas de solutions.

Conclusion :

- *Si* $a \in \{-2,-1,0\}$*, le système n'a pas de solutions.*
- *Si* $a \neq -1$ *et* $b \neq -1$*, le système n'a pas de solutions.*
- *Si* $a \notin \{-2,-1,0\}$ *et* $b = -1$*, le système a une solution unique donnée ci-dessus.*