

CC1 du 15 octobre 2014 - 1 heure

Les calculatrices ne sont pas permises. Les téléphones portables doivent être éteints. Aucun document n'est autorisé. Toute réponse doit être justifiée.

Questions de cours. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et L un endomorphisme de E .

- a. Définir ce qu'est un vecteur propre de L . (1 pt)
- b. Définir ce qu'est une valeur propre de L . (1 pt)

Exercice 1. Soit $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par

$$L(x, y, z) = (y + z, 3x + 3z, -x + y)$$

- a. Écrire la matrice de L par rapport à la base canonique \mathcal{E} de \mathbb{R}^3 . (2 pts)
- b. Déterminer une base du noyau de L . En déduire le rang de L . (3 pts)
- c. Donner la matrice de passage $P = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ de la base canonique à la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ où $\vec{u}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (0, 3, 1)$ et $u_3 = (-1, 2, 1)$. (2 pts)
- d. Calculer $P^{-1} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$. (3 pts)
- e. Déterminer la matrice de L par rapport à la base \mathcal{B} . (3 pts)

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et (S) le système d'équations linéaires suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} ax + 2y + az = 1, \\ ax + (a + 4)y + 3az = -2, \\ -ax - 2y + z = 1, \\ (a + 2)y + (3a + 1)z = b. \end{cases}$$

- a. Montrer que (S) est équivalent au système (S') suivant : (2,5 pts)

$$(S') \quad \begin{cases} ax + 2y + az = 1, \\ (a + 2)y + 2az = -3, \\ (1 + a)z = 2, \\ (1 + a)z = b + 3. \end{cases}$$

- b. Résoudre selon les valeurs des paramètres réels a, b , le système (S) . (2,5 pts)