Feuille d'exercices VI.

Intégration, mesures produits, variables aléatoires

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. On suppose que f est une fonction mesurable sur X à valeurs strictement positives.
Montrer que, pour toute suite (A_n) de parties dans $\mathcal{A}$, si $\displaystyle\int_{A_n} f d\mu$ converge vers 0 alors $(\mu(A_n))$ converge vers 0 (on pourra utiliser le fait que pour tout $p > 0$ on a $A_n \subseteq \{x \in X : f(x) < \frac{1}{p}\} \cup \{x \in A_n : f(x) \geq \frac{1}{p}\}$).

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction intégrable sur X.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \{x \in X : f(x) \geq n\}$. Montrer que la suite $\int_X f \mathbf{1}_{X_n} d\mu$ converge vers 0.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que
$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A f d\mu < \varepsilon \ .$$
(On pourra commencer par traiter le cas où f est bornée)

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs réelles, et f une fonction mesurable à valeurs réelles. On dit que (f_n) *converge vers f en mesure* si
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

1. Montrer que si $\int_X |f_n - f| d\mu$ tend vers 0 alors (f_n) converge vers f en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.
2. Montrer que si (f_n) converge vers f presque sûrement alors (f_n) converge vers f en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.
3. On suppose que (f_n) converge vers f en mesure, et qu'il existe une fonction $g : X \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f_n| \leq g$ presque partout pour tout $n \geq 1$.
   (a) Montrer que $|f| \leq g$ presque partout.
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$ (on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent).

Exercice 4. Montrer à l'aide du théorème de Fubini-Tonelli appliqué à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ que, si $a_{i,j}$ sont des réels positifs, alors on a
$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j} \ .$$

Exercice 5. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire sur cet espace. On suppose que $X = 0$ presque sûrement. Donner la loi de X.

Exercice 6. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ telles que pour $i = 1, 2$,
$$p(X_i = 1) = p(X_i = -1) = \frac{1}{2}.$$
Posons $X_3 = X_1 X_2$. Montrer que les variables X_1 et X_3 sont indépendantes, ainsi que X_2 et X_3. En revanche, montrer que X_1, X_2 et X_3 ne le sont pas.

Exercice 7. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note δ_k la mesure de Dirac au point k. Posons

$$\mu = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \delta_k.$$

1. Montrer que μ est une mesure de probabilité sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
2. On considère la suite de fonctions réelles $f_n = \mathbf{1}_{[0,n]}$.
   (a) Justifier que chaque f_n est borélienne.
   (b) f_n est-elle continue presque partout pour la mesure μ ?
   (c) Calculer
   $$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu.$$

Exercice 8 (Loi 0-1 de Borel)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé et (E_n) une suite d'événements indépendants.
Montrer que la probabilité que ω appartienne à une infinité de E_n est soit 0, soit 1.
Indication : étudier le cas où la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} p(E_n)$ converge, puis le cas où cette somme diverge. Dans le premier cas, utiliser le dernier exercice de la feuille précédente. Dans le second cas, considérer la suite (E_n^c) et montrer que pour tout $N \geq 0$, on a $p(\bigcap\limits_{n \geq N} E_n^c) \leq \prod_{n \geq N} \exp(-p(E_n))$ en utilisant l'inégalité $1 - x \leq \exp(-x)$.

Exercice 9. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles ; on suppose que (X_n) est croissante et converge presque sûrement vers X quand n tend vers $+\infty$, et que Y est une variable aléatoire réelle telle que X_n et Y sont indépendantes pour tout n. Montrer que X est une variable aléatoire réelle et que X et Y sont indépendantes.
On pourra utiliser sans démonstration le fait que deux variables aléatoires réelles sont indépendantes si et seulement si pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $p(X \leq a \text{ et } Y \leq b) = p(X \leq a)p(Y \leq b)$.

Exercice 10. Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, avec $p(U_n = 0) = \frac{1}{2}$ et $p(U_n = 1) = \frac{1}{2}$. Montrer que $V = \sum\limits_{n \geq 1} \frac{U_n}{2^n}$ est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.